INTEGRAL

DEFINIDA

1.-INTEGRAL DEFINIDA.

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo [a, b].

Nota.- Para simplificar la demostración se considera positiva, $f(x) > 0$, en todo punto del intervalo.

Se divide el intervalo [a, b] en "n" subintervalos (no necesariamente de la misma amplitud) por los puntos

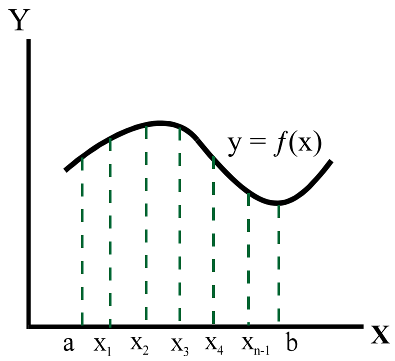
$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b$$

así se dispone de los intervalos cerrados

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1}, x_n]$$

de amplitudes respectivas

$$h_1 = x_1 - x_0,\ h_2 = x_2 - x_1,\ \ldots,\ h_n = x_n - x_{n-1}$$



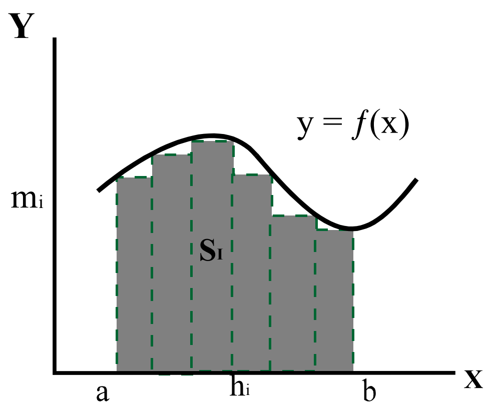
Ahora bien, como la función es contínua en todo el intervalo [a, b], lo es también en cada uno de los subintervalos, por lo que en cada uno de ellos alcanza un **mínimo absoluto**, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, y un **máximo absoluto**, $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

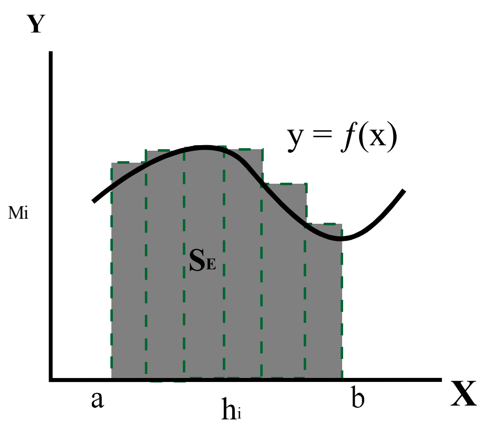
Trazando paralelas al eje OY por cada punto y paralelas al eje OX por los mínimos absolutos, m_i, se obtienen "n" rectángulos, denominados **rectángulos interiores** (ver figura de la izquierda). La suma de sus áreas es

$$S_I = h_1 m_1 + h_2 m_2 + \ldots + h_n m_n = \sum_{k=1}^{n} h_k m_k \qquad (1)$$

De forma similar, trazando paralelas al eje OX por los máximos absolutos, M_i, se obtienen "n" rectángulos, llamados **rectángulos exteriores** (ver figura de la derecha). La suma de sus áreas es

$$S_E = h_1 M_1 + h_2 M_2 + \ldots + h_n M_n = \sum_{k=1}^{n} h_k M_k \qquad (2)$$





consecuencia inmediata de las figuras, es $S_I \leq S_E$

Ahora bien, si se considerasen otros nuevos puntos en el intervalo [a, b] se tendrían otros subintervalos y otros valores de las sumas de las áreas de los rectángulos interiores y exteriores, S'_I y S'_E. Se repite el proceso eligiendo los puntos cada vez más próximos entre sí. Así se formarían dos sucesiones de números reales, las de:

- La suma de las áreas de los rectángulos interiores:

S_I, S'_I, S''_I, ..., y la

- La suma de las áreas de los rectángulos exteriores:

S_E, S'_E, S''_E, ...,

Simbolizando por ***m*** y ***M*** al mínimo y máximo absoluto de $f(x)$ en [a, b], respectivamente, se tiene, en cada tipo de subdivisión

$$m \leq m_1 \leq M_1 \leq M;\ m \leq m_2 \leq M_2 \leq M;\ \ldots\ ;\ m \leq m_n \leq M_n \leq M$$

de donde

$$mh_1 + mh_2 + \ldots + mh_n \leq m_1h_1 + m_2h_2 + \ldots + m_nh_n \leq$$

$$\leq M_1h_1 + M_2h_2 + \ldots + M_nh_n \leq Mh_1 + Mh_2 + \ldots + Mh_n$$

Como

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = b - a$$

$$mh_1 + mh_2 + \ldots + mh_n = m\,(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) = m\,(b - a)$$

$$m_1h_1 + m_2h_2 + \ldots + m_nh_n = S_I \qquad (1)$$

$$M_1h_1 + M_2h_2 + \ldots + M_nh_n = S_E \qquad (2)$$

$$Mh_1 + Mh_2 + \ldots + Mh_n = M\,(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) = M\,(b - a)$$

Por consiguiente:

$$\boxed{m \cdot (b-a) \leq S_I + S_E \leq M \cdot (b-a)} \quad (3)$$

que expresan cualquiera que sea la subdivisión:

- La sucesión de la suma de las áreas de los rectángulos interiores, S_I, S'_I, S''_I, ..., está ***acotada inferiormente.***

- La sucesión de la suma de las áreas de los rectángulos exteriores, S_E, S'_E, S''_E, ..., está ***acotada superiormente.***

- Dado que $S_I \leq S_E$, ambas sumas están ***acotadas.***

Ahora bien, restando (2) y (1), miembro a miembro:

$$S_E - S_I = M_1h_1 + M_2h_2 + \ldots + M_nh_n - m_1h_1 - m_2h_2 - \ldots - m_nh_n$$

$$S_E - S_I = (M_1 - m_1)\,h_1 + (M_2 - m_2)\,h_2 + \ldots + (M_n - m_n)\,h_n$$

Dado que se ha supuesto que $f(x)$ es continua en [a, b], si se consideran los subintervalos lo suficientemente pequeños, las diferencias $M_i - m_i$ pueden ser tan pequeñas como se desean.

Así si se toman

$$M_1 - m_1 < \varepsilon,\ M_2 - m_2 < \varepsilon,\ ...,\ M_n - m_n < \varepsilon \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_E - S_I = h_1\varepsilon + h_2\varepsilon + ... + h_n\varepsilon = (h_1 + h_2 + ... + h_n)\ \varepsilon = (b - a)\ \varepsilon$$

Luego para un ε lo suficientemente pequeño, $S_E - S_I < (b - a) \cdot \varepsilon$ se puede hacer tan pequeño como se quiera.

Simbolizando por $\overline{S}_I$ al extremo superior de la sucesión S_I, S'_I, S''_I, ... y por $\overline{S}_E$ al extremo inferior de la sucesión S_E, S'_E, S''_E, ... como

$$lím\ (S_E - S_I) = 0$$

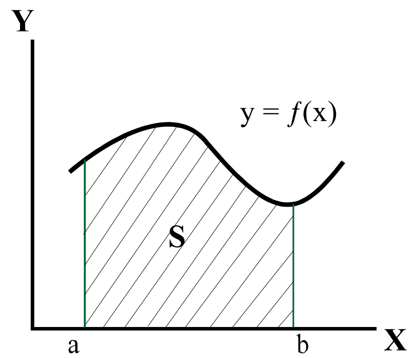
se cumple

$$\boxed{\overline{S}_E = \overline{S}_I} \qquad (4)$$

De lo que se saca la conclusión que *el extremo superior de las sumas de las áreas de los rectángulos interiores y el extremo inferior de las sumas de las áreas de los rectángulos exteriores coinciden.*

Representando por S el área del trapecio mixtilíneo de la figura, delimitado por $f(x)$, el intervalo [a, b] y las paralelas al eje OX , $x = a$ y por $x = b$, como para toda sudivisión se cumple

$$S_I \leq S \leq S_E$$



Por la consecuencia anterior, (4), se verifica:

$$\boxed{\overline{S}_I = S = \underline{S}_E} \qquad (5)$$

De esta forma se puede definir el **área del trapecio mixtilíneo** por

$$\boxed{S = \overline{S}_I = \underset{h_i \to 0}{Lím}\, S_I = \underset{h_k \to 0}{Lím} \sum_{k=1}^{n} h_n m_k} \qquad \boxed{S = \underline{S}_E = \underset{h_i \to 0}{Lím}\, S_E = \underset{h_k \to 0}{Lím} \sum_{k=1}^{n} h_n M_k}$$

A dicho número real se le llama ***integral definida*** de $f(x)$ en el intervalo [a, b], y se escribe:

$$\boxed{\overline{S}_I = \overline{S}_E = \int_a^b f(x)\,dx}$$

que se lee *integral definida entre* ***a*** *y* ***b*** *de* ***f*** *de* ***x*** *diferencial de* ***x***.

Los extremos del intervalo cerrado son, ***a*** límite inferior y ***b*** límite superior de la integral.

2.- SIGNO DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

En la expresión anterior se ha considerado a la función positiva en todo punto del intervalo [a, b]. En esta situación, al ser m_k, M_k, h_k positivos, también los son los productos h_kM_k y h_km_k y sus sumas S_I y S_E, y en consecuencia la integral definida (límite de sumas); luego

$$\text{Si } f(\text{x}) > 0 \text{ en } [a, b], \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx > 0}$$

Si la función f(x) es negativa en todo punto de [a, b], h_k son positivos, pero m_k y M_k son negativos, por lo que son negativos los productos h_km_k y h_kM_k y también lo son sus sumas. Por tanto, si f(x) < 0 su integral definida es negativa.

$$\text{Si } f(\text{x}) < 0 \text{ en } [a, b], \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx < 0}$$

Como el área es una medida, se debe expresar como número positivo; por lo que en el presente caso el área (no la integral definida) es

$$\boxed{S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|}$$

Se insiste en que la integral definida puede ser positiva o negativa, mientras que el área del trapecio mixtilíneo hay que considerarla como número positivo.

3.-PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

Nos limitaremos únicamente a enunciar las propiedades de la integral definida.

I.- La integral definida de una constante por una función es igual a la constante por la integral definida de la función.

Para K = constante:

$$\boxed{\int_a^b K \cdot f(x)\,dx = K \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

II.- La integral definida de la suma algebraica de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones sumando.

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones contínuas en [a, b],

$$\boxed{\int_a^b \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$$

III.- Si a < b y $f(x) \le g(x)$, se tiene:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)dx}$$

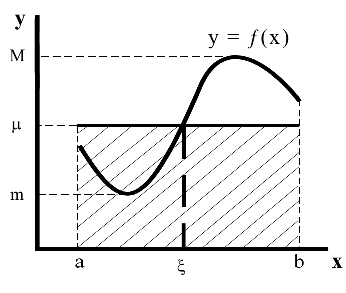
IV.-

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

4.- TEOREMA DE LA MEDIA.

Si la función $f(x)$ es continua en [a, b], existe en dicho intervalo al menos un punto $x = \xi$ tal que verifique:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (a-b)\cdot f(\xi)}$$



En efecto, siendo *m* y *M* los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en [a, b], se tenía

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M\cdot(b-a)$$

como, en general, *b > a, b - a > 0*

$$m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx \leq M$$

de donde

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \mu$$

siendo μ tal que $m < \mu < M$.

Dado que f(x) es continua, dicha función toma todos los valores comprendidos entre m y M; por tanto, para un cierto valor de la x , x = ξ (a < ξ < b), será

$$f(\xi) = \mu \rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

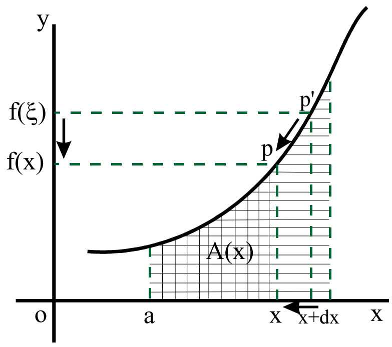
Nota.- En la figura, (b - a) · f(ξ) representa el área del rectángulo punteado, cuyo valor coincide con el área del trapecio mixtilíneo.

5.- FUNCIÓN ÁREA. DERIVADA DE LA FUNCION ÁREA.

Sea una función f(x) continua en un intervalo I. Si se consideran los puntos $x = a$ *y* x, punto genérico del mismo. Se define la función área A(x) por el recinto del plano delimitado por la rama de la función f(x) entre $x = a$ y x, el eje OX y las rectas ordenadas $x = a$ y x (en la figura recinto rayado en vertical).

Se considera un punto suficientemente próximo a x, $x+dx$, dentro del intervalo I; la función área adapta el valor *A·(x + dx)* (en la figura, recinto rayado en horizontal).

Sea la diferencia *A(x + dx) - A(x),* (en la figura recinto rayado únicamente en horizontal). Por el teorema de la media:



$$\int_x^{x+dx} f(x)dx = (x+dx-x) \cdot f(\xi);$$

es decir

$$A(x + dx) - A(x) = f(\xi)\, dx$$

de donde

$$\frac{A(x+d) - A(x)}{dx} = f(\xi)$$

Haciendo tender $dx \to 0$, P' tiende a P, y por tanto, $f(\xi)$ tiende a $f(x)$. Como, por otra parte, se tiene

$$\lim_{dx \to 0} \frac{A(x+d)-A(x)}{dx} = A'(x) \Rightarrow \boxed{A'(x) = f(x)}$$

que señala que la *función área es una primitiva de la función $f(x)$*.

La consecuencia anterior nos abre un importante camino para la determinación del área de figuras planas, apoyándonos en la obtención de funciones primitivas.

6.- REGLA DE BARROW.

De lo anteriormente expresado se puede deducir:

$$A(x) = \int_a^b f(x)dx$$

Si F(x) es una primitiva de f(x), se tiene que:

$$A(x) - F(x) = K \text{ (constante)} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(x) + K$$

Para $x = a$ resulta

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) + K\,;$$

como

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \to 0 = F(a) + K$$

de donde

$$K = -F(a)$$

Fijando $x = b$, resulta la llamada ***fórmula de Barrow***

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

donde $F(x)$ es una primitiva de f(x).