Índice General

CAPÍTULO 3

Integración. Cálculo de integrales

1 La integral indefinida.

Definición y propiedades

Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $F' = f$, se dice que F es una **función primitiva** de f en I.

Ejemplo 1.1 ■ Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x^3$.

(a) $F(x) = x^4$ es una primitiva de $f(x)$ en $\mathbb{R}$, porque $F'(x) = f(x)$. En efecto,

$$F'(x) = (x^4)' = 4x^3 = f(x).$$

(b) $F(x) = x^4 + 5$ es otra primitiva de $f(x)$ en $\mathbb{R}$, porque $F'(x) = f(x)$. En efecto,

$$F'(x) = (x^4 + 5)' = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x).$$

(c) En general, si C es cualquier número real, $F(x) = x^4 + C$ es una primitiva de $f(x)$ en $\mathbb{R}$, porque[1]

$$F'(x) = (x^4 + C)' = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x).$$

Del ejemplo anterior se deduce que si $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función primitiva de $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en I y C es un número real cualquiera, entonces $F(x) + C$ es una función primitiva de $f(x)$, para todo $x \in I$.

[1] Recuérdese que si C es constante, entonces su derivada es cero.

Teorema 1.2 ■ Si dos funciones $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $G : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son primitivas de una misma función $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces existe un número real C tal que $G(x) = F(x)+C$, para cada $x \in I$.

Según el teorema anterior, basta localizar una función primitiva, $F : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de la función $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ para conocer todas las funciones primitivas de f en I; ya que serán de la forma $F(x) + C$, con $C \in \mathbb{R}$ constante, para cada $x \in I$.

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se llama **integral indefinida** de f en $I \subseteq D$, al conjunto de todas las primitivas de f en $I \subseteq D$, lo que se designa por

$$\int f(x)\,dx.$$

Es decir la integral indefinida de f en I es

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

donde F es alguna primitiva de f en I y $C \in \mathbb{R}$ cualquier constante.

Ejemplo 1.3 ■ En el ejemplo 1.1 la integral indefinida de $f(x) = 4x^3$ en $\mathbb{R}$ es

$$\int 4x^3\,dx = x^4 + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4 ■ Otros ejemplos sencillos de integrales indefinidas pueden ser los siguientes:

(a) $\int (6x^5 + 12x^2 - 16x + 5)\,dx = x^6 + 4x^3 - 8x^2 + 5x + C$, ya que

$$(x^6 + 4x^3 - 8x^2 + 5x + C)' = 6x^5 + 12x^2 - 16x + 5.$$

(b) $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + C$, porque $(\operatorname{sen}(x) + C)' = \cos(x)$.

■ Propiedades de la integral indefinida

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones, y $k \in \mathbb{R}$.

1. La integral de la suma (o resta) coincide con la suma de las integrales. Es decir,

$$\int (f(x) \pm g(x))\;dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

2. La integral del producto de un número real, k, por una función es igual a la producto del número real por la integral de la función. Es decir,

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx.$$

Las propiedades 1. y 2. anteriores aseguran que la *integral indefinida es lineal.*

Integrales inmediatas

Las **integrales inmediatas** son aquellas que se deducen directamente de las reglas de derivación. Las más importantes son las siguientes:

1. $\int dx = x + C$, donde $\int dx$ quiere decir $\int 1\,dx$.
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, para todo $n \neq -1$.
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \mathrm{Ln}|x| + C$; $\int \frac{1}{x+a}\,dx = \mathrm{Ln}|x+a| + C$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
4. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$.
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\mathrm{Ln}(a)} + C$, para todo $a \in \mathbb{R}_+$. En particular, $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$, pues $\mathrm{Ln}(\mathrm{e}) = 1$.
6. $\int \mathrm{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + C$.
7. $\int \cos(x)\,dx = \mathrm{sen}(x) + C$.
8. $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \mathrm{tg}(x) + C$.
9. $\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(x)}\,dx = \mathrm{cotg}(x) + C$.
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{arcsen}(x) + C$.
11. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}(x) + C$.

Todas ellas se justifican sin más que calcular la derivada del miembro de la derecha y comprobar que se obtiene la función que está dentro del signo integral. Por ejemplo, en 4) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$ porque

$$\left(\sqrt{x} + C\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

En 8) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \mathrm{tg}(x) + C$ porque

$$\begin{aligned}(\mathrm{tg}(x))' &= \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\mathrm{sen}(x))'\cos(x) - (\cos(x))'\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\mathrm{sen}(x))\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.\end{aligned}$$

Nota 1.5 ■ Al final del tema se incluye una tabla con las integrales inmediatas y las propiedades de la integral.

■ Algunos métodos de integración

A menudo la integral que tratamos de calcular no está contenida en el cuadro de integrales inmediatas. En este caso será preciso, mediante métodos apropiados, transformarla hasta convertirla en una integral similar pero inmediata. A continuación exponemos algunos métodos de integración.

Cambio de variable. Método de sustitución

Para calcular $\int f(x)\,dx$ cuando no es inmediata, podemos *sustituir* la variable x por otra relacionada con ella (*cambio de variable*), en cuyo caso, es preciso sustituir también dx (de ahí la importancia de poner dx en todas las integrales).

Haremos lo siguiente:

1. $x = h(t)$;
2. $dx = h'(t)dt$.

La integral será ahora

$$\int f(x)\,dx = \int f(h(t))h'(t)\,dt.$$

O bien,

1'. $t = q(x)$;

2'. $dt = q'(x)dx$, es decir, $dx = \frac{dt}{q'(x)}$ y se sustituye en la integral como en el caso anterior.

Si se elige debidamente el cambio de variable, puede ocurrir que la nueva expresión sea una integral inmediata. Calculada ésta, volvemos a la variable primera deshaciendo el cambio, esto es, cambiando ahora t por x.

Ejemplo 1.6 ■ Calcular

$$\int 4\mathrm{e}^{(7x+5)}\,dx.$$

Si hacemos $t = 7x+5$, entonces $dt = (7x+5)'\,dx = 7\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{7}$. Sustituyendo en la integral obtenemos que

$$\int 4\mathrm{e}^{(7x+5)}\,dx \overset{t=7x+5}{=} \int 4\mathrm{e}^{t}\frac{dt}{7} = \frac{4}{7}\int \mathrm{e}^{t}\,dt = \frac{4}{7}\mathrm{e}^{t} + C,$$

y deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $7x+5$, concluimos que

$$\int 4\mathrm{e}^{(7x+5)}\,dx = \frac{4}{7}\mathrm{e}^{(7x+5)} + C.$$

Ejemplo 1.7 ■ Calcular

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx.$$

Si hacemos $t = \sqrt{x-1}$, entonces $t^2 = x-1 \Rightarrow 2t\,dt = dx \Rightarrow dx = 2tdt$. Nótese que además se tiene que $x = t^2+1$. Sustituyendo en la integral inicial obtenemos que

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1}\,dx &\overset{t=\sqrt{x-1}}{=} \int (t^2+1)\,t\,2t\,dt = \int (2t^4+2t^2)\,dt \\ &= 2\int t^4\,dt + 2\int t^2\,dt = 2\tfrac{t^5}{5} + 2\tfrac{t^3}{3} + C, \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $\sqrt{x-1}$, obtenemos que

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C.$$

Ejemplo 1.8 ■ Calcular

$$\int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx.$$

Si hacemos $t = \sqrt{3x^4-12}$, entonces $t^2 = 3x^4-12 \Rightarrow 2t\,dt = 12x^3\,dx \Rightarrow x^3\,dx = \frac{2t}{6}\,dt = \frac{t}{6}\,dt$. Sustituyendo en la integral inicial obtenemos que

$$\begin{aligned} \int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx &\overset{t=\sqrt{3x^4-12}}{=} \int \left(\sqrt{3x^4-12}\right)\,x^3\,dx = \int t\tfrac{t}{6}\,dt \\ &= \int \tfrac{1}{6}t^2\,dt = \tfrac{1}{6}\int t^2\,dt = \tfrac{1}{6}\tfrac{t^3}{3} + C = \tfrac{t^3}{18} + C, \end{aligned}$$

y deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $\sqrt{3x^4-12}$, obtenemos que

$$\int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx = \frac{\left(\sqrt{3x^4-12}\right)^3}{18} + C.$$

Método de integración por partes

Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son dos funciones derivables, entonces

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du.$$

Despejando $u \cdot dv$ en la expresión anterior, obtenemos que $u \cdot dv = d(u \cdot v) + v \cdot du$, y por tanto que $\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) + \int v \cdot du$. Finalmente, teniendo en cuenta que $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, obtenemos la siguiente propiedad

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du.$$

El método de integración por partes suele utilizarse en los casos:

$$\begin{array}{lll} \int P(x)\mathrm{e}^{f(x)}\, dx, & \int P(x)\mathrm{Ln}(f(x))\, dx & \int P(x)\,\mathrm{sen}(f(x))\, dx, \\ \int P(x)\cos(f(x))\, dx, & \int \mathrm{e}^{g(x)}\mathrm{sen}(f(x))\, dx, & \int \mathrm{e}^{g(x)}\cos(f(x))\, dx, \end{array}$$

donde $P(x)$ es un polinomio, y f y g dos funciones derivables.

La utilización de este método no es exclusiva ni excluyente a estos seis tipos de funciones, es decir, hay funciones que no son de esta forma pero que sí se pueden integrar por partes (por ejemplo $\int \mathrm{arcsen}(x)\, dx$), y hay funciones que, aún siendo de alguno de estos seis tipos, no se pueden integrar por partes (por ejemplo, $\int x\mathrm{e}^{x^3}\, dx$).

Ejemplo 1.9 ■ Calcular

$$\int x\,\mathrm{sen}(x)\, dx.$$

Sean $\boxed{u = x,}$ entonces $du = (x)'\, dx = dx$, y $\boxed{dv = \mathrm{sen}(x)\, dx,}$ entonces $v = \int \mathrm{sen}(x)\, dx = -\cos(x)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int x\,\mathrm{sen}(x)\, dx &= x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)\, dx \\ &= -x\cos x + \int \cos(x)\, dx \\ &= -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C, \end{aligned}$$

esto es,

$$\int x\,\mathrm{sen}(x)\, dx = -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C.$$

Ejemplo 1.10 ■ Calcular

$$\int x^3\mathrm{Ln}(x)\, dx.$$

Sean $\boxed{u = \mathrm{Ln}(x),}$ entonces $du = (\mathrm{Ln}(x))'\,dx = \frac{1}{x}\,dx$, y $\boxed{dv = x^3 dx,}$ entonces $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int x^3 \mathrm{Ln}(x)\,dx &= \mathrm{Ln}(x)\,\tfrac{x^4}{4} - \int \tfrac{x^4}{4}\tfrac{1}{x}\,dx = \tfrac{x^4\mathrm{Ln}(x)}{4} - \tfrac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \tfrac{x^4\mathrm{Ln}(x)}{4} - \tfrac{1}{4}\tfrac{x^4}{4} + C = \tfrac{x^4\mathrm{Ln}(x)}{4} - \tfrac{x^4}{16} + C,\end{aligned}$$

esto es,

$$\int x^3 \mathrm{Ln}(x)\,dx = \frac{x^4\mathrm{Ln}(x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$$

Ejemplo 1.11 ■ Calcular

$$\int \mathrm{arcsen}(x)\,dx.$$

Sean $\boxed{u = \mathrm{arcsen}(x),}$ entonces $du = (\mathrm{arcsen}(x))'\,dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, y $\boxed{dv = dx,}$ entonces $v = \int dx = x$. Por consiguiente

$$\begin{aligned}\int \mathrm{arcsen}(x)\,dx &= \mathrm{arcsen}(x)\cdot x - \int x \cdot \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\,\mathrm{arcsen}(x) - \int \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.\end{aligned}$$

Ahora, para calcular está última integral, aplicaremos el método de sustitución.

Si hacemos $t = \sqrt{1-x^2}$, entonces $dt = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. De modo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{t=\sqrt{1-x^2}}{=} -\int dt = -t.$$

Deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $\sqrt{1-x^2}$ obtenemos que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2},$$

y entonces podemos concluir que

$$\int \mathrm{arcsen}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcsen}(x) - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C,$$

esto es,

$$\int \mathrm{arcsen}(x)\,dx = x\,\mathrm{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Integración de funciones racionales

Se llama **integral racional** a la integral de una función racional, es decir,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grados $n \geq 0$ y $m > 0$ respectivamente.

Ejemplo 1.12 ■ Ejemplos de integrales racionales son los siguientes

(a) $\int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x}\,dx$, donde el numerador es un polinomio de grado 3 y el denominador un polinomio de grado 2.

(b) $\int \frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}\,dx$, donde el numerador es un polinomio de grado 2 y el denominador un polinomio de grado 4.

(c) $\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\,dx$, donde el numerador es un polinomio de grado 1 y el denominador un polinomio de grado 3.

(d) $\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$, donde el numerador y el denominador son polinomios de grado 3.

(e) $\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$, donde el numerador es un polinomio de grado 3 y el denominador un polinomio de grado 2.

Para calcular las integrales racionales seguiremos los pasos siguientes, que iremos ilustrando con el ejemplo 1.12(a), esto es calculando

$$\int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x}\,dx.$$

PASO 1. División del numerador entre el denominador si $n \geq m$.

Lo primero que debemos hacer es mirar los grados de los polinomios del numerador y del denominador. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, dividimos los polinomios hasta que el grado del numerador sea menor estrictamente que el grado del denominador.

Es conveniente recordar las siguiente regla:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde $C(x)$ es el cociente y el $R(x)$ es el resto de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$.

En nuestro caso,

$$\frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x} = (x+4) + \frac{-x-9}{x^2+x},$$

donde $x+4$ es el cociente y $-x-9$ es el resto de la división de x^3+5x^2+3x-9 entre x^2+x.

Si el grado del numerador fuese estrictamente menor que el grado del denominador no hay que realizar esta división.

PASO 2. Factorización del denominador.

Se factoriza el denominador, si es que aún no lo está, con el fin de separar nuestra fracción en otras fracciones elementales, es decir, más simples para poder integrar. En nuestro caso, es muy sencillo, porque

$$x^2+x=x(x+1).$$

PASO 3. Descomposición en fracciones simples.

Una vez factorizado el denominador, vamos a calcular los valores de A y B para que se verifique la igualdad:

$$\frac{-x-9}{x^2+x}=\underbrace{\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}}_{\text{fracciones simples}}.$$

Calcular A y B no tiene ninguna dificultad. En efecto,

$$\frac{-x-9}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx}{x^2+x}=\frac{(A+B)x+A}{x^2+x}.$$

De donde se deduce que

$$\frac{-x-9}{x^2+x}=\frac{(A+B)x+A}{x^2+x}.$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador, por consiguiente,

$$-x-9=(A+B)x+A.$$

Asimismo, es conocido que para que dos polinomios sean iguales, han de tener el mismo grado, los mismos coeficientes y el mismo término independiente:

$$\left.\begin{array}{lcccccc}\text{Coeficientes de } x\text{:} & A & + & B & = & -1 \\ \text{Términos independientes:} & A & & & = & -9\end{array}\right\}$$

De este modo obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, A y B, cuya solución es $A=-9$ y $B=8$.

Con lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{-x-9}{x^2+x}=\frac{-9}{x}+\frac{8}{x+1}.$$

Obsérvese que las integrales de las fracciones de la izquierda son prácticamente inmediatas.

PASO 4. Integración de todos los sumandos obtenidos.

Una vez que hemos descompuesto la fracción en suma de polinomios y de fracciones simples se procede a integrar todos los sumandos.

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x}\,dx &= \int \left((x+4)+\tfrac{-9}{x}+\tfrac{8}{x+1}\right)dx\\ &= \int (x+4)dx+\int \tfrac{-9}{x}\,dx+\int \tfrac{8}{x+1}\,dx\\ &= \tfrac{x^2}{2}+4x-9\int \tfrac{1}{x}\,dx+8\int \tfrac{1}{x+1}\,dx\\ &= \tfrac{x^2}{2}+4x-9\,\mathrm{Ln}|x|+8\,\mathrm{Ln}|x+1|+C.\end{aligned}$$

Concluyendo que

$$\int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x}\,dx=\frac{x^2}{2}+4x-9\,\mathrm{Ln}|x|+8\,\mathrm{Ln}|x+1|+C.$$

■

Vamos a calcular la integral racional del apartado (b) del ejemplo 1.12, es decir,

$$\int \frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}\,dx.$$

PASO 1. División del numerador entre el denominador si $n \geq m$.

Como el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador, no hay que efectuar la división.

PASO 2. Factorización del denominador.

Factorizamos el denominador aplicando el método de Ruffini tantas veces como sea necesario. En este caso,

$$x^4+16x^3+12x+4=(x+1)^2(x+2)^2.$$

PASO 3. Descomposición en fracciones simples.

Realizamos las descomposición en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tfrac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4} &= \tfrac{A}{x+1}+\tfrac{B}{(x+1)^2}+\tfrac{C}{x+2}+\tfrac{D}{(x+2)^2}\\ &= \tfrac{A(x+1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+1)^2(x+2)+D(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2}\\ &= \tfrac{(A+C)x^3+(5A+B+4C+D)x^2+(8A+4B+5C+2D)x+(4A+4B+2C+D)}{(x+1)^2(x+2)^2}.\end{aligned}$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador. Entonces

$$\begin{aligned} x^2-3x-2 &= (A+C)x^3+(5A+B+4C+D)x^2 \\ &\quad +(8A+4B+5C+2D)x+(4A+4B+2C+D). \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\left.\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{Coeficientes de } x^3: & A & & & + & C & & & = & 0 \\ \text{Coeficientes de } x^2: & 5A & + & B & + & 4C & + & D & = & 1 \\ \text{Coeficientes de } x: & 8A & + & 4B & + & 5C & + & 2D & = & -3 \\ \text{Términos independientes:} & 4A & + & 4B & + & 2C & + & D & = & -2 \end{array}\right\}$$

De este modo obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas, A, B, C y D, cuya solución es $A=-9$, $B=2$, $C=9$ y $D=8$.

Con lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}=\frac{-9}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{9}{x+2}+\frac{8}{(x+2)^2}.$$

PASO 4. Integración de todos los sumandos obtenidos.

Una vez que hemos descompuesto la fracción en suma de fracciones simples se procede a integrar todos los sumandos.

$$\begin{aligned} \int \tfrac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}\,dx &= \int \left(\tfrac{-9}{x+1}+\tfrac{2}{(x+1)^2}+\tfrac{9}{x+2}+\tfrac{8}{(x+2)^2}\right)dx \\ &= \int \tfrac{-9}{x+1}\,dx+\int \tfrac{2}{(x+1)^2}\,dx+\int \tfrac{9}{x+2}\,dx+\int \tfrac{8}{(x+2)^2}\,dx \\ &= -9\,\mathrm{Ln}|x+1|-\tfrac{2}{x+1}+9\,\mathrm{Ln}|x+2|-\tfrac{8}{x+2}+C. \end{aligned}$$

■

Vamos a calcular la integral racional del apartado (c) del ejemplo 1.12, es decir,

$$\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\,dx.$$

PASO 1. División del numerador entre el denominador si $n \geq m$.

Como el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador, no hay que efectuar la división.

PASO 2. Factorización del denominador.

Factorizamos el denominador aplicando el método de Ruffini tantas veces como sea necesario. En este caso,

$$x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1).$$

Obsérvese que x^2+1 es un polinomio de segundo grado que no tiene raíces reales.

PASO 3. Descomposición en fracciones simples.

Realizamos las descomposición en fracciones simples de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tfrac{x}{x^3-x^2+x-1} &= \tfrac{A}{x-1}+\tfrac{Bx+C}{x^2+1}\\ &= \tfrac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \tfrac{(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador. Entonces

$$x=(A+B)x^2+(-B+C)x+(A-C).$$

De donde se sigue que

$$\left.\begin{array}{lccccccc}\text{Coeficientes de } x^2: & A & + & B & & & = & 0\\ \text{Coeficientes de } x: & & - & B & + & C & = & 1\\ \text{Términos independientes:} & A & & & - & C & = & 0\end{array}\right\}$$

De este modo obtenemos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, A, B y C, cuya solución es $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$ y $C=\frac{1}{2}$.

Con lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1/2}{x-1}+\frac{(-1/2)x+1/2}{x^2+1}.$$

PASO 4. Integración de todos los sumandos obtenidos.

Una vez que hemos descompuesto la fracción en suma de fracciones simples se procede a integrar todos los sumandos.

$$\begin{aligned}\int\tfrac{x}{x^3-x^2+x-1}\,dx &= \int\left(\tfrac{1/2}{x-1}+\tfrac{(-1/2)x+1/2}{x^2+1}\right)dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int\tfrac{1}{x-1}\,dx+\tfrac{1}{2}\int\tfrac{-x+1}{x^2+1}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Ln}|x-1|-\tfrac{1}{2}\int\tfrac{x}{x^2+1}\,dx+\tfrac{1}{2}\int\tfrac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Ln}|x-1|-\tfrac{1}{4}\int\tfrac{2x}{x^2+1}\,dx+\tfrac{1}{2}\mathrm{arctg}(x)\\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Ln}|x-1|-\tfrac{1}{4}\mathrm{Ln}(x^2+1)+\tfrac{1}{2}\mathrm{arctg}(x)+C.\end{aligned}$$

Los apartados (d) y (e) del ejemplo 1.12 se calculan de forma análoga, obteniéndose los siguientes resultados:

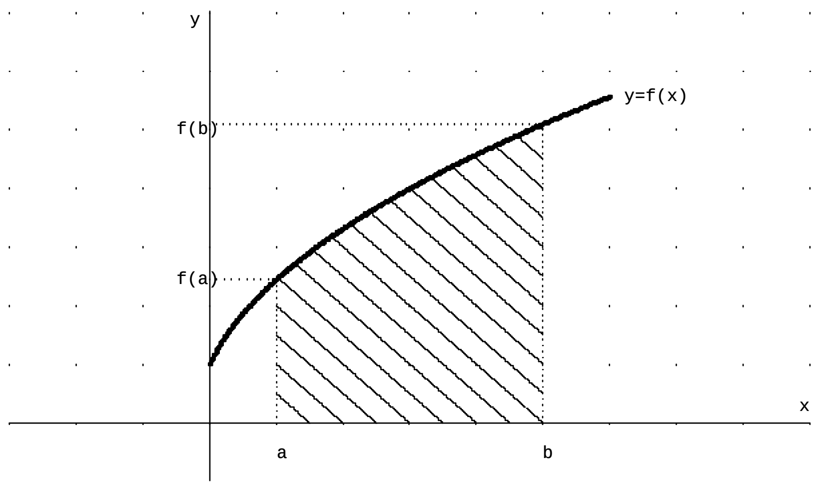
(d) $\int\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx=2\,\mathrm{arctg}(x)+4\,\mathrm{Ln}|x-1|+x+C.$

(e) $\int\frac{x^3}{x^2+1}\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{\mathrm{Ln}(x^2+1)}{2}+C.$

2 La integral de Riemann

Ejemplo 2.1 ■ Consideremos la función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica es la curva de la figura 1 y $[a, b] \subseteq D$ (obsérvese que, según la gráfica dada, f es continua y positiva en $[a, b]$), y supongamos que queremos calcular el area que encierran la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre a y b. Es decir, queremos calcular el área sombreada de la figura 1.

Figura 1. El área que encierra el curva $y = f(x)$ entre a y b.



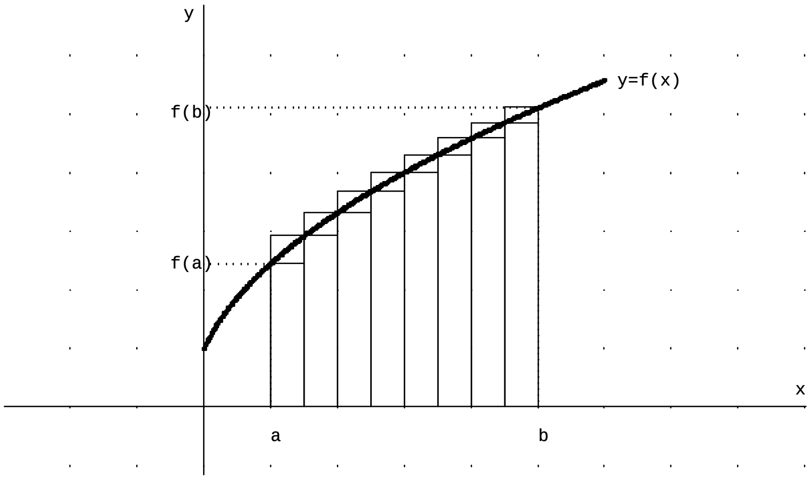
Podemos calcular esta área de forma aproximada dibujando la gráfica en un papel cuadriculado y contando los cuadrados. Es claro, que la aproximación será más precisa cuanto menores sean las cuadrículas. Sin embargo, en general no obtendremos el área exacta, solamente conseguiremos una aproximación.

Consideremos ahora la división de esta área en bloques rectangulares, tal y como muestra la figura 2.

Los pequeños "triángulos"que quedan por debajo de la curva en la figura 2 representan la diferencia entre el área real A y su aproximación (por defecto) A_L mediante los bloques rectangulares que quedan por debajo de la curva. Otra aproximación (por exceso) a A viene dada por A_U, que se puede calcular sumando las áreas de los bloques rectangulares que quedan por encima de la curva. Es claro que

$$A_L \leq A \leq A_U.$$

Figura 2. Aproximación del área mediante bloques rectangulares.



Por tanto, el área que queremos determinar se encuentra entre A_L (suma de las áreas de los rectángulos inferiores) y A_U (suma de las áreas de los rectángulos superiores).

También parece claro que si reducimos el ancho de cada rectángulo, reduciendo su base y obteniendo de este modo más rectángulos entre a y b, entonces A_L y A_U estarán más próximos a A.

Por consiguiente, si el ancho de los rectángulos tiende hacia cero, A_L y A_U se aproximan a A. Luego, el área, A, que encierran la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre a y b es la *suma entre a y b de las áreas de rectángulos de base δx, y altura $f(x)$, cuando δx tiende a cero*, es decir,

$$A = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x \in [a,b]} f(x)\delta x.$$

Lo que habitualmente se escribe

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

De hecho el signo integral $\int$ es una S (de suma) estilizada, pues en cierto sentido no estamos haciendo otra cosa que "sumar las áreas" de todos los rectángulos de base infinitesimal, dx, y altura $f(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

En general, Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si la gráfica de la función f y el eje OX encierran un área (delimitada), como ocurría en el caso anterior, entre a

y b se dice que la función en **integrable (en sentido Riemann) en el intervalo** $[a, b]$. En otro caso se dice que no es integrable.

A la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$ se le llama **integral de Riemann de f en el intervalo** $[a, b]$.

Teorema 2.2 ■ Toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

Además, se tiene que si $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

mide el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre a y b.

Nota 2.3 ■ Destacamos que en el ejemplo 2.1 la función considerada era continua, y por lo tanto integrable, y positiva en $[a, b]$, es decir, $|f(x)| = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. De aquí que $\int_a^b f(x)\,dx$ coincidiese con el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre a y b.

Teorema 2.4 ■ Si $f : [a, b] \subseteq D \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Sin embargo existen funciones acotadas que no son integrables.

Ejemplo 2.5 ■ Sea $f : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}; \\ 1 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Esta función, llamada **función de Dirichlet**, no es integrable en $[0, 1]$ pues se cumple que $A_L = 0$ y $A_U = 1$, independientemente del ancho de las bases de los rectángulos.

Veamos que para calcular la integral de Riemann de una función continua en intervalo $[a, b]$ basta conocer una de sus primitivas

Teorema 2.6 ■ **Regla de Barrow**. Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ y $F : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 2.7 ■ Calcular en área delimitada por la curva $y = \sqrt{5x+1}$ y el eje OX entre 1 y 5.

Sea $f : [1,5] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{5x+1}$. Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [1,5]$, el área que nos piden corresponde a la siguiente integral de Riemann

$$\int_1^5 |f(x)|\,dx \overset{f(x)\geq 0}{=} \int_1^5 f(x)\,dx.$$

Teniendo en cuenta que una primitiva de f en $[1,5]$ es $F(x) = \frac{2(5x+1)^{3/2}}{15}$ (compruébese), de la regla de Barrow se sigue que

$$\int_1^5 \sqrt{5x+1}\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx = F(5) - F(1) = \frac{2(26)^{3/2}}{15} - \frac{2(6)^{3/2}}{15} \cong 15.72.$$

Ejemplo 2.8 ■ Calcular el área de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$.

La gráfica de la función $f : [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ es precisamente la cuarta parte de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$. De modo que el área que nos piden es cuatro veces el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y el OX entre 0 y r, es decir,

$$\begin{aligned} 4\left(\int_0^r |\sqrt{r^2-x^2}|\,dx\right) &\overset{f(x)\geq 0}{=} 4\left(\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx\right) \\ &= 4\left(\frac{r^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)}{2} + \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}\right)\Bigg|_0^r = 4\left(\frac{\pi r^2}{4} - 0\right) = \pi r^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.9 ■ Calcular el área delimitada por el eje OX y las rectas $y = 3$ en ente 0 y 1 e $y = 5$ entre 1 y 2.

Sea $f : [0,2] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \in [0,1]; \\ 5 & \text{si} \quad x \in (1,2]. \end{cases}$$

La gráfica de f consiste precisamente en las porciones de las rectas $y = 3$ e $y = 5$ comprendidas entre 0 y 1, y 1 y 2, respectivamente. No obstante, como la función f no es continua en $[0, 2]$ no podemos usar la regla de Barrow.

Sin embargo, las funciones $f_1 : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = 3$ y $f_2 : [1, 2] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_2(x) = 5$ sí son continuas en $[0, 1]$ y $[1, 2]$, respectivamente. Como $f_1(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$ y $f_2(x) \geq 0$ para todo $x \in [1, 2]$, el área que nos piden corresponde a la siguiente suma de integral de Riemann

$$\int_0^1 f_1(x)\, dx + \int_1^2 f_2(x)\, dx.$$

Teniendo ahora en cuenta que $F_1(x) = 3x$ es una primitiva de f_1 en $[0, 1]$ y que $F_2(x) = 5x$ es una primitiva de f_2 en $[1, 2]$, (compruébese), de la regla de Barrow se sigue que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 f_1(x)\, dx + \int_1^2 f_2(x)\, dx &= (F_1(1) - F_1(0)) + (F_2(2) - F_2(1)) \\ &= (3 \cdot 1 - 3 \cdot 0) + (5 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = 8. \end{aligned}$$

■ Propiedades de la integral

Sean $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a, b] \subseteq D$.

(a) La integral es lineal:

$$\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\, dx = \int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

Obsérvese que esta propiedad no es más que una consecuencia de la linealidad de la integral indefinida.

(b) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

En términos geométricos esta propiedad parece bastante razonable, pues viene a decirnos que el área limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre a y b es un número positivo.

(c) Para todo $c \in [a, b]$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Obsérvese que en el ejemplo 2.9 ya hicimos un uso implícito de esta propiedad. De hecho es una propiedad fundamental para calcular integrales de funciones integrables con un número finito de discontinuidades.

(d)
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Esta última propiedad nos advierte que, generalmente, no es lo mismo la integral del valor absoluto que el valor absoluto de la integral. Compruébese usando la función $f:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=1$ si $x\in[0,1]$ y $f(x)=-1$ si $x\in(1,2]$.

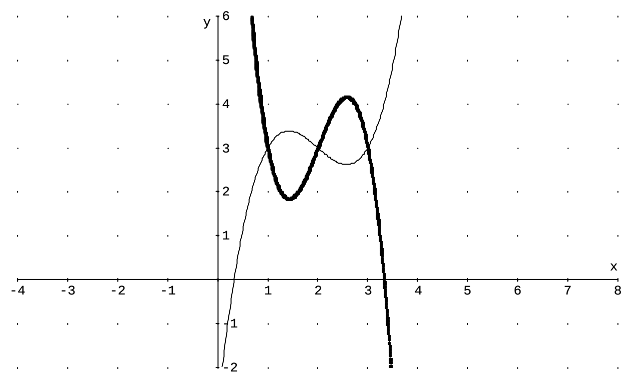
3 Aplicaciones de la integral de Riemann

■ Área encerrada por dos curvas

Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$ tales que $g(x)\leq f(x)$ para todo $x\in[a,b]$, entonces el área de la región plana limitada por las curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$ entre a y b es
$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$

Ejemplo 3.1 ■ Determinar el área limitada por las curvas $y=x^3-6x^2+11x-3$ e $y=-3x^3+18x^2-33x+21$.

Figura 3. Gráfica de las curvas $y=x^3-6x^2+11x-3$ e $y=-3x^3+18x^2-33x+21$.



En la figura 3 se muestran las gráficas de nuestras dos curvas; la curva de trazo fino corresponde a $y=x^3-6x^2+11x-3$ y la curva de trazo grueso corresponde a $y = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 21$. Observamos además que las curvas se cortan en los puntos $(1,3)$, $(2,3)$ y $(3,3)$, ya que son los puntos que corresponden a las soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 11x - 3 = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 21$ (compruébese).

Sean $f : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 3$ y $g : [1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = -3x^3 + 18x^2 - 33x + 21$. Entonces, $f(x) \geq g(x)$ si $x \in [1,2]$ y $g(x) \geq f(x)$ si $x \in [2,3]$. Por consiguiente, el área que nos piden es

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_1^2 (f(x) - g(x))\, dx + \int_2^3 (g(x) - f(x))\, dx = \\
&= \textstyle\int_1^2 (4x^3 - 24x^2 + 44x - 24)\, dx + \int_2^3 (-4x^3 + 24x^2 - 44x + 24)\, dx \\
&= (x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x)\big|_1^2 + (-x^4 + 8x^3 - 22x^2 + 24x)\big|_2^3 = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

■ Longitud de arco

Sea f una función derivable con derivada continua en $[a,b]$. Si denotamos por A al punto $(a, f(a))$ y por B al punto $(b, f(b))$, entonces la longitud del arco AB de la curva $y = f(x)$ viene dada por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Si la curva viene dada en forma paramétrica, $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right.$ donde x e y tienen derivada continua en $[t_1, t_2]$, entonces la longitud del arco de curva entre los parámetros t_1 y t_2 viene dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Ejemplo 3.2 ■ Calcular el perímetro de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$.

En coordenadas cartesianas. La gráfica de la función $f : [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ es precisamente la cuarta parte de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r > 0$. De modo que el perímetro que nos piden es cuatro veces la longitud del arco AB de la curva $y = f(x)$ donde A es el punto $(0, f(0) = r)$ y B el punto $(r, f(r) = 0)$, es decir,

$$\begin{aligned}
4\left(\int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx\right) &= 4\left(\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx\right) \\
&= 4\left(r \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)\right)\Big|_0^r = 4\left(r\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi r.
\end{aligned}$$

En coordenadas paramétricas. Las ecuaciones paramétrica de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r>0$ es

$$\begin{cases} x &= r\cos(t) \\ y &= r\operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

con $t\in[0,2\pi]$. De modo que el perímetro de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r>0$ es la longitud del arco de curva entre los parámetros 0 y 2π, es decir,

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(-r^2\operatorname{sen}^2(t))+(r^2\cos^2(t)}\,dt=\int_0^{2\pi} r\,dt=2\pi r.$$

■ Volumen de un cuerpo de revolución

Si se hace girar entre a y b la curva $y=f(x)$ alrededor del eje OX se genera un sólido de revolución cuyo volumen viene dado por

$$\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx.$$

Ejemplo 3.3 ■ Calcular el volumen de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio $r>0$.

La esfera de centro $(0,0,0)$ y radio $r>0$, se puede obtener como el cuerpo de revolución que se genera al girar la semicircunferencia de centro $(0,0)$ y radio $r>0$ comprendida entre $-r$ y r alrededor del eje OX, es decir, al girar la curva $y=\sqrt{r^2-x^2}$ entre $-r$ y r alrededor del eje OX. Por lo tanto, el volumen que nos piden es

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx &= \int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)^2\,dx=\pi\left(r^2x-\tfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} \\ &= \pi\left(r^3-\tfrac{r^3}{3}-(r^2\,(-r)-\tfrac{(-r)^3}{3})\right)=\tfrac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

Al girar la región plana entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ alrededor del eje OX entre a y b, con $f(x)\geq g(x)$, para todo $x\in[a,b]$, el volumen del sólido de revolución engendrado es

$$\int_a^b \pi((f(x))^2-(g(x))^2)\,dx.$$

Ejemplo 3.4 ■ Calcular el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la región plana comprendida entre las rectas $y=x$ e $y=x+1$ alrededor del eje OX entre 1 y 2.

Sean $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ y $g : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x$. Las gráficas de f y g son las porciones de las rectas $y = x + 1$ e $y = x$ comprendidas entre 1 y 2, respectivamente. Además, $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [1, 2]$. Entonces, el volumen que nos piden no es más que

$$\int_1^2 \pi((x+1)^2 - (x)^2)\, dx = \pi \int_1^2 2x + 1\, dx = \pi(x^2 + x)\Big|_1^2 = \pi(6-2) = 4\pi.$$

■ Área de la superficie de un cuerpo de revolución

Sea f una función derivable con derivada continua en $[a, b]$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. El área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX entre los valores abscisa a y b es

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Si la curva viene dada en forma paramétrica, $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array} \right.$ donde x e y tienen derivada continua en $[t_1, t_2]$, entonces el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva alrededor del eje OX entre los valores abscisa t_1 y t_2 viene dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Ejemplo 3.5 ■ Calcular el área de la superficie de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$.

La esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$, se puede obtener como el cuerpo de revolución que se genera al girar la semicircunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $r > 0$ comprendida entre $-r$ y r alrededor del eje OX.

Lo que **en coordenadas cartesianas** corresponde a girar la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ entre $-r$ y r alrededor del eje OX. Por lo tanto, el área que nos piden es

$$\begin{array}{rcl} \int_r^{-r} 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx & = & \int_r^{-r} 2\pi\sqrt{r^2 - x^2}\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \\ & = & 2\pi \int_r^{-r} r\, dx \\ & = & 2\pi(rx)|_{-r}^{r} = 2\pi(r^2 - r\cdot(-r)) \\ & = & 4\pi r^2. \end{array}$$

Lo que **en coordenadas paramétricas** corresponde a girar la curva de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$$

con $t \in [0, \pi]$ alrededor del eje OX. De modo que, el área que nos piden es

$$\begin{aligned} \int_0^\pi 2\pi r \mathrm{sen}(t)\sqrt{(-r^2\mathrm{sen}(t))^2 + (r^2\cos(t))^2}\,dt &= 2\pi \int_0^\pi r^2\mathrm{sen}(t)\,dt \\ &= 2\pi \left(-r^2\cos(t)\right)\Big|_0^\pi \\ &= 2\pi\left(r^2 - (r^2 \cdot (-1))\right) \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Ejercicios

Ejercicio 1.1 ■ Calcular las siguientes integrales usando el *método de sustitución.*

a) $\int \frac{x}{1+(x^2+4)^2}dx$ *b)* $\int 5x^2 \text{sen}(x^3)\, dx$ *c)* $\int \frac{\text{Ln}(x)}{x}dx$

d) $\int \mathrm{e}^{9x+5}\, dx$ *e)* $\int (\mathrm{e}^x+2)^{25}\mathrm{e}^x dx$ *f)* $\int 3x\sqrt{2+7x^2}\, dx$

Ejercicio 1.2 ■ Calcular las siguientes integrales usando el *método de integración por partes.*

a) $\int x\mathrm{e}^{2x}\, dx$ *b)* $\int x^2\mathrm{e}^x dx$ *c)* $\int x\,\text{Ln}(x)\, dx$

d) $\int x^3\text{sen}(x)dx$ *e)* $\int x^n\text{Ln}(x)\, dx,\ n>1$ *f)* $\int (x^2+5x-9)\mathrm{e}^{-2x}\, dx$

Ejercicio 1.3 ■ Calcular las integrales de las siguientes *funciones racionales.*

a) $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}\, dx$ *b)* $\int \frac{2x^3+4x^2+3}{x^2+x-2}\, dx$ *c)* $\int \frac{1}{x^2-4}\, dx$

d) $\int \frac{4x^3-21x^2+38x-23}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}\, dx$ *e)* $\int \frac{x+1}{(x-2)(x^2+3)}\, dx$ *f)* $\int \frac{x}{x^3+6x^2+11x+6}\, dx$

Ejercicio 1.4 ■ Calcular las siguientes integrales usando los diferentes métodos estudiados. Es posible que en alguna de ellas será necesario el uso de, al menos, dos métodos.

a) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, dx$ *b)* $\int \frac{1-\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x}}\, dx$ *c)* $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}\, dx$

d) $\int \mathrm{e}^x\text{sen}(x)\, dx$ *e)* $\int (x^3-4x^2+7x+6)\mathrm{e}^{5x}\, dx$ *f)* $\int \frac{x^3}{2+x^8}\, dx$

Ejercicio 1.5 ■ Calcular las siguientes integrales usando los diferentes métodos estudiados. Es posible que en alguna de ellas será necesario el uso de, al menos, dos métodos.

a) $\int \frac{x+1}{x^2+4x+4}\, dx$ *b)* $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$ *c)* $\int \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\, dx$

d) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\, dx$ *e)* $\int \frac{3x-5}{(x-1)^2(x^2+4)}\, dx$ *f)* $\int \frac{x}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\, dx$

Ejercicio 1.6 ■ Calcular una función que tome el valor 38 en el punto $x = 3$, y que tenga por derivada a $f'(x) = 6x^2 + 2x - 10$.

Ejercicio 1.7 ■ Determinar la expresión analítica de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya gráfica pasa por el punto $P = (10, 2)$ y tal que $f'(x) = 2x - \frac{3}{x}$, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejercicio 1.8 ■ Hallar la primitiva de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\, f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^x$, que se anula en para $x = 1$.

Ejercicio 1.9 ■ ¿Por qué no puede ser cierto el siguiente resultado y dónde está el fallo?

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2.$$

Ejercicio 1.10 ■ Dar un ejemplo de una función f que no sea integrable en $[0, 1]$ y tal que $|f|$ sí lo sea.

Ejercicio 1.11 ■ Estudiar la integrabilidad de las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1 & \text{si} \quad x \in [-3, 0); \\ x & \text{si} \quad x \in [0, 2); \\ |x - 3| & \text{si} \quad x \in [2, 7]. \end{cases}$$

Ejercicio 1.12 ■ Hallar el valor de μ que cumpla $\int_1^3 f(x)dx = 2\mu$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [1, 2); \\ 2 & \text{si} \quad x \in [2, 3]. \end{cases}$$

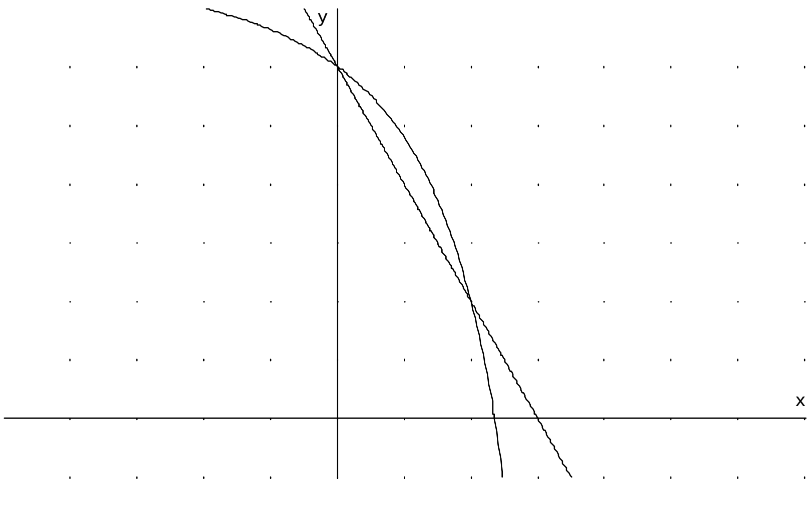
Ejercicio 1.13 ■ Calcular el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ejercicio 1.14 ■ Determinar el área limitada por las curvas

$$y = \frac{4x^2 - 20x + 18}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{e} \quad y = 3 - 2x,$$

con $x \in (-\infty, 2)$, sabiendo que las gráficas de ambas funciones son:



Ejercicio 1.15 ■ Calcular el área de la figura comprendida entre las parábolas $y = \frac{x^2}{3}$ e $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

Ejercicio 1.16 ■ Calcular el área de la figura comprendida entre la *curva de Agnesi* $y = \frac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{x^2}{2}$.

Ejercicio 1.17 ■ Determinar la longitud del arco de curva $y = 1 + \text{Ln}(x)$ entre los puntos $(1, 1)$ y $(2, 1 + \text{Ln}(2))$.

Ejercicio 1.18 ■ Hallar la longitud del arco $y = \text{arcsen}(\text{e}^{-x})$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Ejercicio 1.19 ■ Calcular los volúmenes

(a) del cono de radio r y altura h;

(b) del cilindro de radio r y altura h,

usando que ambos son volúmenes de revolución.

Ejercicio 1.20 ■ Calcular el área de la superficie generada al girar respecto del eje OX un arco de la cura

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t}{3}(t^2 - 3) \end{cases}$$

entre los puntos de intersección de la curva con el eje OX.

Tabla de integrales indefinidas inmediatas

$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$

$\int (k \cdot f(x))\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx.$

$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1.$

$\int f(x)^n \cdot f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1.$

$\int \frac{1}{x}\, dx = \mathrm{Ln}(x) + C.$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \mathrm{Ln}(f(x)) + C.$

$\int a^x, dx = \frac{a^x}{\mathrm{Ln}(a)}$ con $a > 0.$

$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{\mathrm{Ln}(a)} + C$ con $a > 0.$

$\int \mathrm{e}^x, dx = \mathrm{e}^x + C.$

$\int \mathrm{e}^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \mathrm{e}^{f(x)} + C.$

$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C.$

$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\, dx = \sqrt{f(x)} + C.$

$\int \frac{1}{n\, \sqrt[n]{x^{n-1}}}\, dx = \sqrt[n]{x} + C.$

$\int \frac{f'(x)}{n\, \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}\, dx = \sqrt[n]{f(x)} + C.$

$\int \mathrm{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + C.$

$\int f'(x) \cdot \mathrm{sen}(f(x))\, dx = -\cos(f(x)) + C.$

$\int \cos(x)\, dx = \mathrm{sen}(x) + C.$

$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))\, dx = \mathrm{sen}(f(x)) + C.$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \mathrm{tg}(x) + C.$

$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\, dx = \mathrm{tg}(f(x)) + C.$

$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = \operatorname{cotg}(x) + C.$

$\int \frac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2(f(x))}\,dx = \operatorname{cotg}(f(x)) + C.$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C.$

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C.$

$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C.$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C.$

$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C.$

$\int \frac{-1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccotg}(x) + C.$

$\int \frac{-f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \operatorname{arccotg}(f(x)) + C.$