GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO

PRODUCTO ESCALAR

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos x$ (Cuando sepamos el ángulo que forman a y b).

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ (Cuando sepamos las coordenadas de a y b).

Cuando los vectores son perpendiculares su producto escalar será 0 (Cero).

PRODUCTO VECTORIAL

Dados lo vectores $\vec{u} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (x', y', z')$

$$\vec{u} x \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

(El vector que resulta de este determinante es **perpendicular** a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y su módulo coincide con el *ÁREA DEL PARALELOGRAMO* que forman u y v).

COORDENADAS DE UN VECTOR LIBRE

Dados los puntos A(a,b,c) y B (d,e,f) el vector con origen en A y extremo en B se calcula restando B - A $\overrightarrow{AB} = B - A$

ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO

. Para hallar la ecuación de una recta es necesario conocer ***UN PUNTO Y EL VECTOR DIRECTOR*** de la misma.

Una recta, [obtenida a partir de un **PUNTO** (x_0, y_0, z_0) y un **VECTOR** (v_1, v_2, v_3)], se puede expresar de las siguientes formas:

1.- ECUACIÓN VECTORIAL: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(v_1, v_2, v_3)$

2.- ECUACIONES PARAMÉTRICAS :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_1 \\ y = y_0 + t \cdot v_2 \\ z = z_0 + t \cdot v_3 \end{cases}$$

3.- ECUACIÓN CONTINUA:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

4.- EC. GENERAL DE LA RECTA (Intersección de dos planos):

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \end{aligned}$$

NOTA: Para hallar **el vector** de una recta expresada como intersección de dos planos basta con hacer el producto vectorial ***axb.*** *siendo a=(A,B,C) y b=(A',B',C').*

Para hallar **un punto** sólo hay que darle a la x o a la y o a la z un valor arbitrario, sustituirlo en el sistema y despejar las otras dos incógnitas.

ECUACIONES DEL PLANO Para hallar la ecuación de un plano es necesario conocer ***UN PUNTO Y DOS VECTORES DIRECTORES*** del mismo.

Un plano, [Obtenido a partir de un **PUNTO** (x_0, y_0, z_0) y **DOS VECTORES** $\vec{V}$ (v_1, v_2, v_3) y $\vec{W}$ (w_1, w_2, w_3)], se puede expresar de las siguientes formas:

1.- ECUACIÓN VECTORIAL:

$$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1,w_2,w_3)$$

2.- ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t\cdot v_1 + s\cdot w_1 \\ y = y_0 + t\cdot v_2 + s\cdot w_2 \\ z = z_0 + t\cdot v_3 + s\cdot w_3 \end{cases}$$

3.- ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

NOTA: Para hallarla sólo hay que realizar este determinante e igualarlo a cero.

4.- ECUACIÓN SEGMENTARIA:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Los valores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ se denominan, respectivamente, ***abscisa***, ***ordenada***, y ***cota*** en el origen.

5.- OTRA FORMA DE HALLAR LA ECUACIÓN DE UN PLANO:

Un plano también se puede hallar sabiendo **UN PUNTO Y SÓLO UN VECTOR**, siempre y cuando ese vector sea **perpendicular al plano** (llamado vector normal), las coordenadas de ese vector coinciden con los coeficientes (**A,B,C**) del plano; para hallar el término independiente (**D**) del plano, sólo hay que sustituir las coordenadas del punto que nos den y despejar **D**.

Ej/.

Vector normal (3, 4, 5)

π: **A**x + **B**y + **C**z + D = O

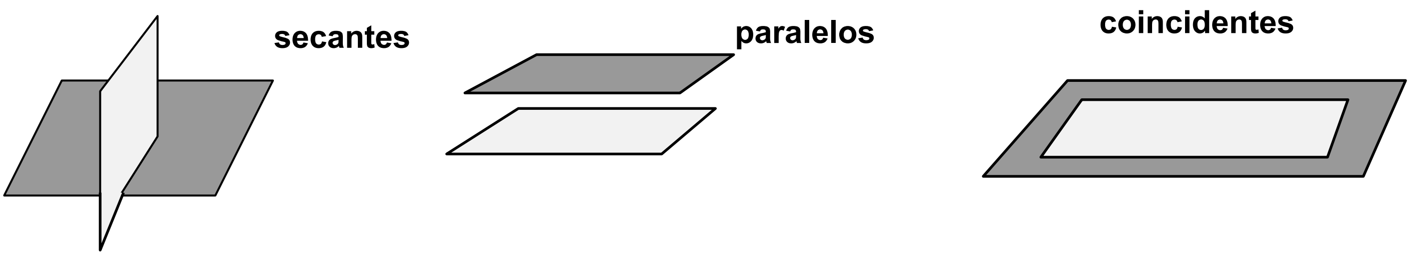
POSICIONES RELATIVAS.

Posición relativa DE DOS PLANOS.

π: A x + B y + C z + D = 0
π': A'x + B'y + C'z + D' = 0

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

	Rango de **M**	Rango de **M***	Posición de DOS PLANOS
Caso 1	2	2	Planos **secantes**
Caso 2	1	2	Planos **paralelos** y distintos
Caso 3	1	1	Planos **coincidentes**



$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'} \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'} \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

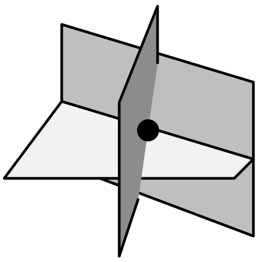
Posición relativa DE TRES PLANOS

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

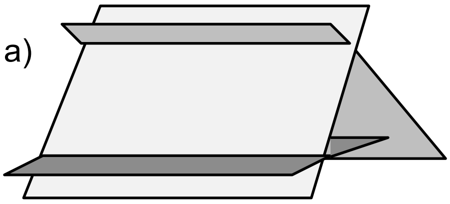
π: A x + B y + C z + D = 0
π': A' x + B'y + C'z + D' = 0
π'': A''x + B''y + C''z + D'' = 0

	Rango de **M**	Rango de **M***	Posición de TRES PLANOS
Caso 1	3	3	Planos **secantes en un punto**.
Caso 2	2	3	a) Planos **secantes dos a dos** forman una superficie prismática. **(3 SEC)** b) **Dos** planos **paralelos** cortados por el otro. **(2 PARAL. y 1 SEC)**
Caso 3	2	2	a) Plano **distintos** y se cortan en una recta. (3 SEC) b) **Dos coincidentes** y el otro los corta. (2 COINC. y 1 SEC.)
Caso 4	1	2	a) Planos **paralelos** y distintos **dos a dos**. **(3 PARAL.)** b) **Dos** son **coincidentes** y **el otro paralelo** a ellos y distinto. **(2 COINC. y 1PARAL.)**
Caso 5	1	1	Planos **coincidentes**.

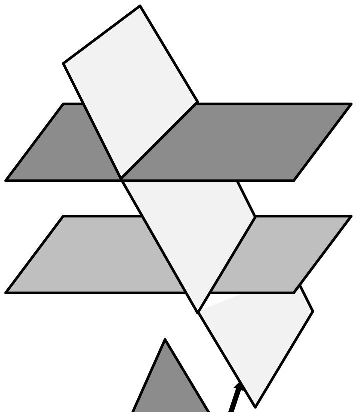
Caso 1:



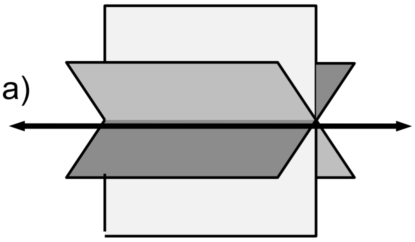
Caso 2: a)



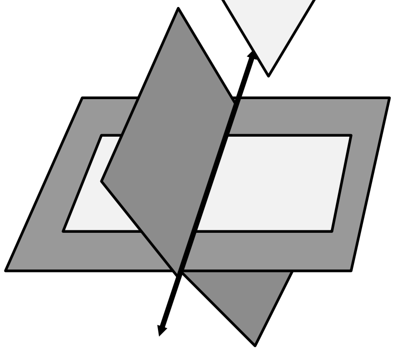
b)



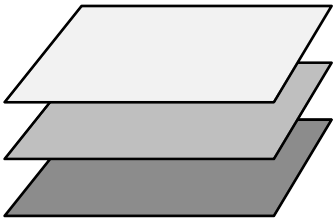
Caso 3: a)



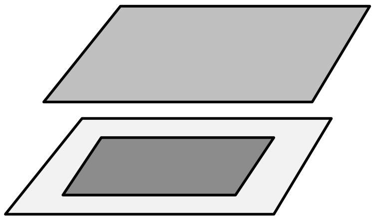
b)



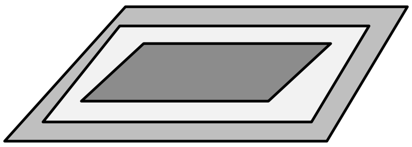
Caso 4: a)



b)



Caso 5:

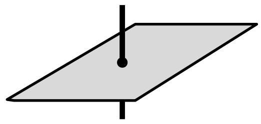
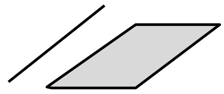
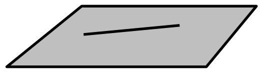


Posición relativa DE PLANO Y RECTA.

Si la recta nos la dan de la forma general: $r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

Y el plano de la siguiente forma $\alpha = A''x+B''y+C''z+D''=0$

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$ Entonces se estudian los rangos de *M* y *M'*:

	Rango de M	Rango de M*	Posición de recta y plano	Gráficamente
Caso 1	3	3	Recta y plano secantes	
Caso 2	2	3	Recta y plan paralelos	
Caso 3	2	2	Recta contenida en el plano	

Posición relativa DE DOS RECTAS.

Dadas dos rectas **r** y **s** por sus ecuaciones generales:

$$r:\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = (\end{cases} \quad s:\begin{cases} A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{cases} \quad M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad M=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Se estudian los rangos de *M* y *M'*:

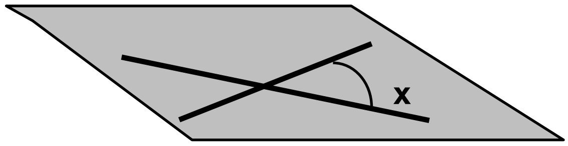
	Rango de **M**	Rango de **M***	Posición de DOS RECTAS
Caso 1	3	4	rectas **cruzadas**
Caso 2	3	3	rectas **secantes**
Caso 3	2	3	rectas **paralelas**
Caso 4	2	2	rectas **coincidentes**

Dadas dos rectas **r** y **s**, de las que conocemos el vector director y un punto de cada una:
VECTORES $\vec{V}(v_1, v_2, v_3)$, $\vec{W}(w_1, w_2, w_3)$ y PUNTOS (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1)

		Rango de **M**	Rango de **M***	Posición de DOS RECTAS
$M=\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$	Caso 1	2	3	rectas **cruzadas**
$M=\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ X_1-X_0 & Y_1-Y_0 & Z_1-Z_0 \end{pmatrix}$	Caso 2	2	2	rectas **secantes**
	Caso 3	1	2	rectas **paralelas**
	Caso 4	1	1	rectas **coincidentes**

Ángulo de DOS RECTAS:

Sean **u** y **v** los vectores de dos rectas **r** y **s**.

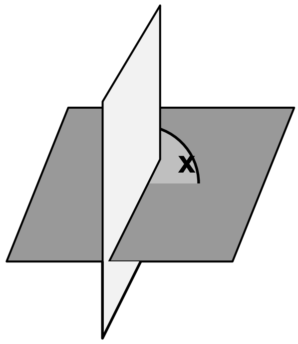


$$\mathbf{Cos\ x} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Ángulo entre DOS PLANOS:

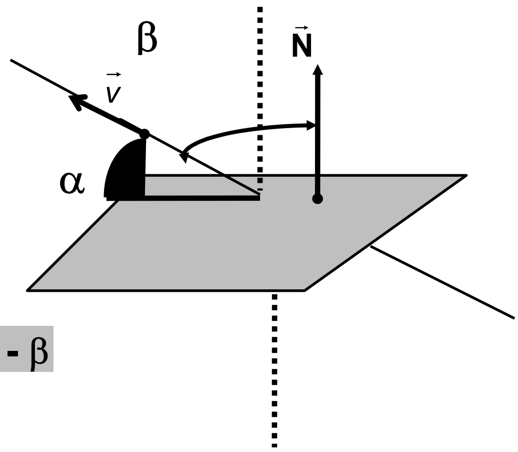
Sean **u** y **v** los vectores **normales** de dos planos π π'

$$\mathbf{Cos\ x} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$



Ángulo entre PLANO Y RECTA.

Sea $\vec{N}$ el vector normal del plano
$\vec{v}$ el vector director de la recta.



El ángulo que hay que hallar NO es β sino α que se calcula: $\longrightarrow$ $\alpha = 90^{o} - \beta$

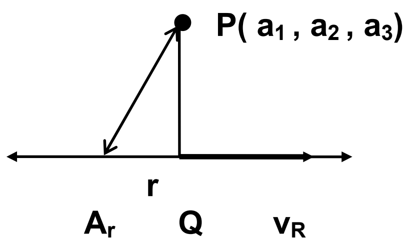
Distancia ENTRE DOS PUNTOS

A(a_1 , a_2 , a_3) **B(b_1 , b_2 ,b_3)**

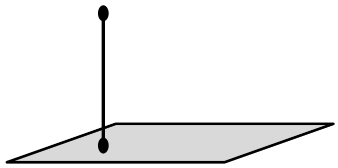
$$\mathbf{d}\,(\mathbf{A,B}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Distancia DE UN PUNTO A UNA RECTA

$$\mathbf{d(P,r)} = \frac{|\overrightarrow{A_rP}\ \mathbf{X}\ \vec{V}_r|}{|\vec{v}_r|}$$



Distancia DE UN PUNTO A UN PLANO

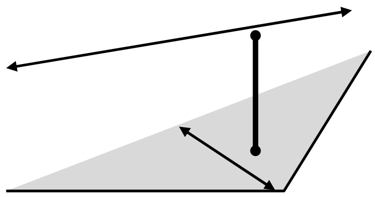


$$d(P,\pi)=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

π: $Ax + By + Cz + D = 0$

Distancia entre DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

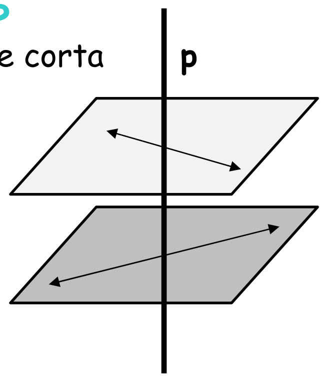
$$d(r,s)=\frac{\left|\det(\overrightarrow{P_rP_s},\vec{u}_r,\vec{u}_s)\right|}{\left|\vec{u}_r x \vec{u}_s\right|}$$



PERPENDICULAR COMÚN A DOS RECTAS CRUZADAS

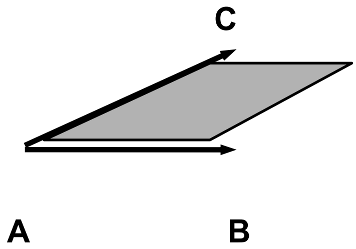
Se llama perpendicular común de dos rectas cruzadas a la recta que corta ortogonalmente a cada una de ellas.

$$p:\begin{cases}\det\left(\overrightarrow{A_rX},\vec{u}_r,\vec{u}_r X\vec{u}_s\right)=0\\ \det\left(\overrightarrow{A_sX},\vec{u}_s,\vec{u}_r X\vec{u}_s\right)=0\end{cases}$$

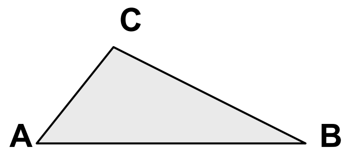


VOLUMENES Y ÁREAS

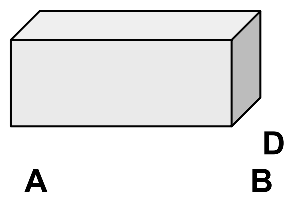
ÁREA DEL PARALELOGRAMO: $S(ABC)=\left|\overrightarrow{AB}\,X\,\overrightarrow{AC}\right|$



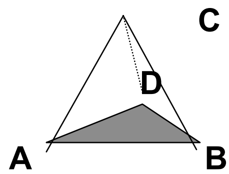
ÁREA DEL TRIANGULO: $S(ABC)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\,X\,\overrightarrow{AC}\right|$



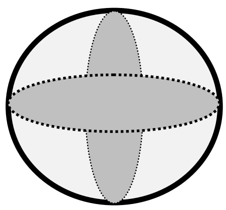
VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO: $V=\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$



VOLUMEN DEL TETRAEDRO: $V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$



SUPERFICIE ESFÉRICA: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$



CÁLCULO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO DE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

Llamamos **bisectriz, b,** del ángulo que forman las rectas r y r' a la recta que divide a dicho ángulo en dos partes iguales.

Hay que observar que ***son dos*** las bisectrices que podemos trazar, para hallarlas utilizaremos los vectores directores de las rectas ***r* y *r'*.**

Sean r y r' dos rectas secantes en un **punto P**, con vectores directores $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$, es decir:

$\mathbf{r}: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u}$ **y** $\mathbf{r'}: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{v}$

- Si los vectores directores de las rectas tuviesen el mismo módulo, al sumarlos formaríamos un rombo, en el cual el vector suma y el vector diferencia serían las diagonales mayor y menor, respectivamente. En este caso, las diagonales del rombo son las bisectrices de los ángulos interiores, por tener los cuatro lados iguales y sus ángulos iguales dos a dos.
- Si los vectores no tienen el mismo módulo, normalizándolos obtenemos vectores directores de las rectas de módulo uno, y los vectores directores de las bisectrices serían el vector suma y el vector diferencia de los normalizados. Por tanto, las ecuaciones de sus bisectrices serán:

$$\mathbf{b_1}: \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot (\vec{u}' + \vec{v}') \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b_2}: \vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot (\vec{u}' - \vec{v}')$$

siendo $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ los vectores unitarios de $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$.

Ejemplo

Vamos a hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas

$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$ y $s: (x,y,z) = (1,2,-1) + \lambda(1,0,0)$. Con $\lambda \in \mathbb{R}$

Si hallamos la posición relativa de las rectas, obtenemos que se cortan en el punto **P(2,2,-1).** Sea $\vec{u}$ = **(1, 2, -2)** el vector director de ***r*** de módulo $|\vec{u}| = 3$ y $\vec{v} = (1,0,0)$ el vector director de ***s***, de módulo $|\vec{v}| = 1$.

Normalizando $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$, obtenemos $\vec{u}' = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ y $\vec{v}' = (1,0,0)$: luego las ecuaciones de las bisectrices son:

$$\mathbf{b_1}: (x,y,z) = (2,2,-1) + \lambda\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \qquad \mathbf{b_2}: (x,y,z) = (2,2,-1) + \mu\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$