INTRODUCCIÓN. FUNCIONES. LÍMITES.

Este capítulo puede considerarse como una prolongación y extensión del anterior, límite de sucesiones, al campo de las funciones.
Se inicia recordando el concepto de función y dando algunas nociones básicas sobre funciones, para dar paso al estudio del límite de una función, cálculo de límites de funciones y continuidad.
En este tema la intuición juega un papel definitivo. Se ha procurado evitar en lo posible las formalizaciones rigurosas, ya que muchas veces formalizar lo que intuitivamente está claro no aporta más claridad.

De los tres conceptos que se estudian es este capítulo, funciones, límites y continuidad, el primero y el último son muy sencillos de comprender.

Las funciones están presentes en la vida cotidiana: «espacio que recorre un móvil en función del tiempo», «crecimiento de una planta en función del tiempo», «coste de cierto papel en función de la cantidad», «aumento o disminución de la temperatura del agua en función del tiempo», ...

Una línea continua es una línea que no se corta, que no se rompe, que se puede dibujar en un papel sin levantar el lápiz.

La representación gráfica de una función continua es una línea continua.

El concepto de límite de una función es algo más complejo, a pesar de explicarse como un paso intermedio entre las funciones y la continuidad.

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Dados dos conjuntos *D* e *I*, se dice que *f* es una *función* definida en el conjunto *D* y tomando valores en el conjunto *I* cuando a cada elemento de *D* se le asigna uno y sólo un elemento de *I*.

Se representa por $f: D \longrightarrow I$

El conjunto *D* recibe indistintamente los nombres de *conjunto origen, conjunto inicial, dominio de la función,* o *campo de existencia de la función*, y se representa por *Dom*(*f*).

Un elemento cualquiera del conjunto *D* se representa por la letra *x*, y es la *variable independiente*.

Cada elemento *x* de *D* tiene por imagen, mediante la función *f*, un elemento de *I* que se representa por *y* y es la *variable dependiente*. Esto se expresa escribiendo *y = f(x)*.

El conjunto *I* es el *conjunto final* y los elementos que son imagen de algún elemento de *D* forman el conjunto imagen (*Im*(*f*)) o *recorrido de la función* (*f(D)*).

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow I \\ x &\longrightarrow f(x) = y \end{aligned}$$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Se llama *función real de variable real* a toda función definida de un subconjunto D de los números reales, en el conjunto **R** de los números reales, tal que a cada elemento x de D le corresponde uno y sólo un elemento y de **R**:

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = y \end{aligned}$$

Para que una función quede correctamente definida es necesario determinar:

- El conjunto inicial o dominio de la función.
- El conjunto final o imagen de la función.
- La regla por la cual se asigna a cada elemento del conjunto origen un solo elemento del conjunto imagen.

Así, por ejemplo, la función definida por:

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longrightarrow x^2 \end{aligned}$$

asigna a cada número real su cuadrado.

Tiene por conjunto origen o campo de existencia todos los números reales, pues dado cualquier número real x, siempre es posible calcular su cuadrado, siendo el resultado otro número real.

Tiene por conjunto imagen todos los números reales positivos, puesto que el cuadrado de un número siempre es positivo:
$Im(f) = \mathbf{R}^+$.

La regla de asignación es «dado cualquier número real x, calcular su cuadrado para obtener la imagen».

Ejemplo: cálculo de campos de existencia de una función

① Hallar el campo de existencia de la función f definida por
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Resolución:

- La función anterior asigna a cada número x, el valor
$\dfrac{1}{x-2}$.

El campo de existencia está formado por todos los números reales x, para los que su imagen está definida mediante la función *f*.

La expresión $\frac{1}{x-2}$ está definida para todos los números reales, salvo para aquellos que anulen el denominador, puesto que la expresión 1/0 no es un número real. El denominador $x - 2$ se anula cuando $x = 2$.

Por tanto, el campo de existencia de la función es **R** - {2}.

Su representación mediante intervalos es *C.E.* = $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

② Hallar el campo de existencia de la función $g(x) = +\sqrt{x^2 - 9}$.

Resolución:

•La expresión $+\sqrt{x^2 - 9}$ está definida cuando el radicando es mayor o igual que cero, puesto que las raíces cuadradas de los números negativos no tienen sentido en el conjunto de los números reales.

Por tanto, se trata de hallar qué valores de x hacen que $x^2 - 9 \geq 0$.

•$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Luego *C.E.* = $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

③ Hallar el campo de existencia de la función definida por $h(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}$.

Resolución:

•La expresión $\frac{1}{x^2 - x - 6}$ está definida cuando el denominador no se anula.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{matrix} \rightarrow x_1 = 3 \\ \rightarrow x_2 = -2 \end{matrix}$$

• Por tanto, al campo de existencia pertenecen todos los números reales excepto el 3 y el -2.

$C.E. = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$

④ Dada la función f, definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$, hallar la imagen de los números -3, 0, 3 y 5. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Hay algún número que se transforme en el 0?

Resolución:

•$f(-3) = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$ $\qquad f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(3) = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$ $\qquad f(5) = \frac{1}{\sqrt{5^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$

● Campo de existencia:

El denominador nunca se hace cero, ya que $x^2 + 2 > 0$ para cualquier x. Si $x^2 + 2 < 0$, $\sqrt{x^2+2}$ no existiría y por tanto la función no estaría definida en esos puntos, pero $x^2 + 2 > 0$ (es más $x^2 + 2 \geq 2$, ya que $x^2 \geq 0$). Por lo tanto, el campo de existencia de esta función es toda la recta real **R**.

● Para responder a la pregunta siguiente, hay que estudiar si existe algún número x, tal que $f(x) = 0$.

Si $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} = 0 \Rightarrow 1 = 0$. Absurdo. Así pues el 0 no es imagen de ningún número.

REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN

La representación gráfica de una función permite visualizar de un modo claro y preciso su comportamiento.

Una función f asigna a cada número x del conjunto origen, un número $y = f(x)$ del conjunto imagen.

El conjunto de los pares de números *(x, y)* determinados por la función recibe el nombre de *grafo* de la función.

Para obtener los pares basta con dar valores a la variable independiente *x,* y obtener los correspondientes de la variable dependiente *y*, formando así una tabla de valores de la función.

Una vez obtenidos los pares de números, se representan en un sistema de ejes cartesianos, que consiste en dos ejes perpendiculares que se cortan en un punto, llamado origen de coordenadas, y representado por *O*; el eje horizontal recibe el nombre de *eje de abscisas*, y en él se representan los valores de la variable independiente; el eje vertical recibe el nombre de *eje de ordenadas*, y en él se representan los valores de la variable dependiente. Cada par de números corresponde a un punto del plano. Uniendo todos los puntos, se obtiene la gráfica de la función.

Ejercicio: representación gráfica de funciones

① Representar gráficamente la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x \leq 0 \\ 3 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Resolución:

Esta función toma el valor -2 para todos los puntos cuya abscisa sea negativa o cero, y toma el valor 3 para todos los puntos cuya abscisa sea positiva. En este caso
Im(*f*) = {-2, 3}.

OPERACIONES CON FUNCIONES

Suma de funciones

Sean *f* y *g* dos funciones reales de variable real definidas en un mismo intervalo. Se llama suma de ambas funciones, y se representa por *f* + *g*, a la función definida por

$$(f+g)\,(x) = f(x) + g(x)$$

Resta de funciones

Del mismo modo que se ha definido la suma de funciones, se define la resta de dos funciones reales de variable real *f* y *g*, como la función

$$(f-g)\,(x) = f(x) - g(x)$$

Para que esto sea posible es necesario que *f* y *g* estén definidas en un mismo intervalo.

Producto de funciones

Sean *f* y *g* dos funciones reales de variable real, y definidas en un mismo intervalo. Se llama función producto de *f* y *g* a la función definida por

$$(f \cdot g)\,(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Cociente de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, *f* y *g*, y definidas en un mismo intervalo, se llama función cociente de *f* y *g* a la función definida por

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(La función *f/g* está definida en todos los puntos en los que la función *g* no se anula.)

Producto de un número por una función

Dado un número real *a* y una función *f*, el producto del número por la función es la función definida por

$$(a \cdot f)\,(x) = a \cdot f(x)$$

Ejercicio: operaciones con funciones

① Sean las funciones *f*(*x*) = 3*x* + 1, y *g*(*x*) = 2*x* - 4.

Definir la función *f* + *g* y calcular las imágenes de los números 2, -3 y 1/5.

Resolución:

● La función *f* + *g* se define como
(*f* + *g*) (*x*) = *f*(*x*) + *g*(*x*) = *x* + 1 + 2*x* - 4 = 5*x* - 3.

● (*f* + *g*) (2) = 5 · 2 - 3 = 7
(*f* + *g*) (-3) = 5(-3) - 3 = -18
(*f* + *g*) (1/5) = 5 · 1/5 - 3 = -2

Obsérvese que si se calculan las imágenes de *f* y *g* por separado y se suman, el resultado es el mismo.

Por ejemplo, para la imagen del 2,

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 3\cdot 2 + 1 = 7 \\ g(2) = 2\cdot 2 - 4 = 0 \end{array}\right\} (f+g)\ (2) = 7 + 0 = 7$$

② Dadas las funciones $f\,(x) = x^2 - 3$, y $g(x) = x + 3$, definir la función $(f - g)(x)$.

Calcular las imágenes de 1/3, -2 y 0 mediante la función $f - g$.

Resolución:

- $(f - g)\ (x) = f\,(x) - g(x) = x^2 - 3 - (x + 3) = x^2 - 3 - x - 3 = x^2 - x - 6$
- $(f - g)\ (1/3) = (1/3)^2 - 1/3 - 6 = -56/9$

  $(f - g)\ (-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$

  $(f - g)\ (0) = (0)^2 - 0 - 6 = -6$

Calculando las imágenes de los números mediante las funciones *f* y *g* por separado, y efectuando la resta, se obtiene el mismo resultado.

③ Dadas las funciones $f(x) = \frac{x}{2} - 3$ y $g(x) = 2x + 1$, definir la función $f \cdot g$.

Resolución:

- $(f \cdot g)\ (x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{x}{2} - 3\right)\ (2x + 1) = x^2 - \frac{11}{2}x - 3$

Calculando las imágenes de los números mediante las funciones *f* y *g* por separado, y multiplicando después, se obtienen los mismos resultados.

④ Dadas las funciones $f(x) = -x - 1$, y $g(x) = 2x + 3$, definir f/g.

Calcular las imágenes de los números -1, 2 y 3/2 mediante $\frac{f}{g}$.

Resolución:

- $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x - 1}{2x + 3}$

La función *f/g* está definida para todos los números reales, salvo para $x = -3/2$, donde la función *g* se anula.

- $\left(\frac{f}{g}\right)\ (-1) = \frac{0}{1} = 0;\ \left(\frac{f}{g}\right)\ (2) = \frac{-3}{7};\ \left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-5/2}{6} = \frac{-5}{12}$

Calculando por separado las imágenes de los números mediante las funciones *f* y *g*, y después efectuando su cociente, se obtienen los mismos resultados.

⑤ Dada la función $f(x) = x^2 + x - 2$, calcular $3 \cdot f$ y $\frac{1}{3} \cdot f$.

Obtener las imágenes de los números 2, 1 y 0 mediante la función 3 · *f*.

Resolución:

- $(3 \cdot f)\ (x) = 3 \cdot f(x) = 3 \cdot (x^2 + x - 2) = 3x^2 + 3x - 6$
- $\left(\frac{1}{3} \cdot f\right)\ (x) = \frac{1}{3} \cdot f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x - 2)$
- $(3 \cdot f)\ (2) = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 6 = 12$
- $(3 \cdot f)\ (1) = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 0$
- $(3 \cdot f)\ (0) = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 = -6$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones reales de variable real, *f* y *g*, se llama *composición de las funciones f* y *g,* y se escribe *g* o *f,* a la función definida de **R** en **R**, por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

La función $(g \circ f)(x)$ se lee « *f* compuesto con *g* aplicado a *x* ».

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g[f(x)] \end{array}$$

Primero actúa la función *f* y después actúa la función *g*, sobre *f*(*x*).

<u>Cálculo de la imagen de un elemento mediante una función compuesta</u>

Para obtener la imagen de la función compuesta aplicada a un número *x*, se siguen estos pasos:

1. Se calcula la imagen de *x* mediante la función *f*, *f*(*x*).

2. Se calcula la imagen mediante la función *g*, de *f*(*x*). Es decir, se aplica la función *g* al resultado obtenido anteriormente.

Ejercicio: composición de funciones

① Sean las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$.

Calcular $g \circ f$ y la imagen mediante esta función de 1, 0 y -3.

Resolución:

- $(g \circ f)\ (x) = g[f(x)] = g[(x+3)] = (x+3)^2$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{R} \xrightarrow{f} & \mathbf{R} & \xrightarrow{g} \mathbf{R} \\ x \rightarrow & f(x) = x+3 & \rightarrow g[f(x)] = g(x+3) = (x+3)^2 \end{array}$$

● La imagen de dos números 1, 0, -3, mediante la función $g \circ f$ es:

$$(g \circ f)\ (1) = g[f(1)] = g(1+3) = g(4) = 4^2 = 16$$
$$(g \circ f)\ (0) = g[f(0)] = g(0+3) = g(3) = 3^2 = 9$$
$$(g \circ f)\ (-3) = g[f(-3)] = g[(-3)+3] = g(0) = 0^2 = 0$$

② Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1$, y $g(x) = 3x - 2$, calcular:
a) $(g \circ f)\ (x)$
b) $(f \circ g)\ (x)$
c) $(g \circ f)\ (1)$ y $(f \circ g)\ (-1)$
d) El original de 49 para la función $g \circ f$.

Resolución:

a) La función $g \circ f$ está definida por:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbf{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = x^2 + 1 \longrightarrow g[f(x)] = g(x^2+1) = 3(x^2+1) - 2 =$$
$$= 3x^2 + 3 - 2 = 3x^2 + 1$$

b) La función $f \circ g$ está definida por:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbf{R} \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow g(x) = 3x - 2 \longrightarrow f[g(x)] = (3x-2)^2 + 1 =$$
$$= 9x^2 + 4 - 12x + 1 = 9x^2 - 12x + 5$$

Obsérvese que $g \circ f \neq f \circ g$.

c) Aplicando los resultados de los apartados anteriores:

$$(g \circ f)\ (1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$$
$$(f \circ g)\ (-1) = 9 \cdot (-1)^2 - 12(-1) + 5 = 26$$

d) El original de 49 para la función $g \circ f$ será un número x, tal que $(g \circ f)\ (x) = 49$.

$(g \circ f)\ (x) = 3x^2 + 1 = 49$. Basta con resolver esta ecuación.

$$3x^2 + 1 = 49 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

FUNCIONES SIMÉTRICAS

Funciones pares

Una *función f* es *par* cuando cumple *f*(*x*) = *f*(-*x*).

Es decir, las imágenes de valores opuestos coinciden.

$$f(2) = f(-2),\ f(3) = f(-3),\ f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right),\ \ldots$$

Por coincidir las imágenes de valores opuestos, la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje *Y*.

Funciones impares

Una *función f* es *impar* si cumple *f*(*x*) = -*f*(*x*).

A valores opuestos de *x* corresponden imágenes opuestas. (La imagen de 2 es la opuesta de la imagen de -2; la imagen de -1 es la opuesta de la imagen de 1...).

Por corresponder a valores opuestos de *x*, imágenes opuestas, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Ejercicio: ejemplos de funciones pares e impares

① Indicar cuáles de estas funciones son pares:

$f(x) = x^2;\ g(x) = 3x + 2;\ k(x) = |x|.$

Resolución:

$$\bullet \left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f(-x) = (-x)^2 = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

La función *f*(*x*) es par.

$$\bullet \left.\begin{array}{l} g(x) = 3x + 2 \\ g(-x) = 3(-x) + 2 = -3x + 2 \end{array}\right\} g(x) \neq g(-x)$$

La función *g*(*x*) no es par.

$$\bullet \left.\begin{array}{l} k(x) = |x| \\ k(-x) = |-x| = |x| \end{array}\right\} k(x) = k(-x)$$

k(*x*) = |*x*| es una función par.

② ¿Cuáles de estas funciones son impares?:

$f(x) = x;\ g(x) = x^3;\ h(x) = x + 1$

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet f(x) = x \\ f(-x) = -x = -f(x)\end{array}\right\} f(x) = -f(x)$$

Esta función es impar.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet g(x) = x^3 \\ g(-x) = (-x)^3 = -x^3\end{array}\right\} g(-x) = -g(x)$$

Esta función es impar.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet h(x) = x + 1 \\ h(-x) = -x + 1\end{array}\right\} h(-x) \neq -h(x)$$

$h(x)$ no es una función impar.

Funciones inversas

Dada una *función* $f(x)$, su inversa es otra función, designada por $f^{-1}(x)$ de forma que se verifica: si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$

● *Pasos a seguir para determinar la función inversa de una dada:*

— Despejar la variable independiente *x*.

— Intercambiar la *x* por la *y*, y la *y* por la *x*.

La función así obtenida es la inversa de la función dada.

Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto de la bisectriz del 1er cuadrante y del 3er cuadrante.

Ejercicio: cálculo de la función inversa de una dada

① Hallar la función inversa de $y = 5x - 2$, y representar las gráficas de ambas funciones en el mismo sistema de ejes.

Resolución:

$\bullet$Se despeja x : $x = \dfrac{y+2}{5}$

● Se intercambian ambas variables:
$y = \frac{x+2}{5}$

La función inversa es $y = \frac{x+2}{5}$

② Hallar la función inversa de $y = +\sqrt{x}$, en su campo de existencia, y representar las gráficas de ambas funciones en el mismo sistema de ejes.

Resolución:

El campo de existencia de la función $y = +\sqrt{x}$ son todos los números positivos, incluido el cero.

●Se despeja *x* : $x = y^2$

●Se intercambian ambas variables: $y = x^2$.

La función inversa de $y = +\sqrt{x}$ es $y = x^2$.

③ Hallar la función inversa de $y = -x + 4$, y representar las gráficas de ambas funciones en el mismo sistema de ejes.

Resolución:

● Se despeja *x* : $x = -y + 4$.

● Se intercambian ambas variables:
$y = -x + 4$.

La función dada coincide con su inversa.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

<u>Idea intuitiva de límite de una función en un punto</u>

El *límite de una función* $y = f(x)$ en un punto x_0 es el valor al que tiende la función en puntos muy próximos a x_0.

<u>Idea intuitiva de límite</u>

1. Considérese la función lineal $y = 2x + 1$. ¿A qué valor se aproxima la función, cuando *x* se aproxima al valor 3?

Resolución:

● Si se quiere estudiar el límite de esta función cuando *x* tiende a 3, hay que ver los valores que toma la función en puntos muy próximos a 3.

Para ello se puede hacer la siguiente tabla de valores:

● Se observa que al tomar valores de *x* muy próximos a 3, ya sean mayores o menores que él, sus imágenes se aproximan al valor 7. Cuanto mayor es la proximidad de *x* a 3, mayor es la proximidad de *f*(*x*) a 7.

Esto se expresa diciendo que, cuando *x* tiende a 3, el límite de la función *y* = 2*x* + 1 es 7, y se escribe

$\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7.$

LÍMITES LATERALES

•El *límite por la izquierda* de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a x_0, es el valor al que tiende la función para puntos muy próximos a x_0 y menores que x_0.

Para expresar el límite por la izquierda se escribe $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

•El *límite por la derecha* de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a x_0, es el valor al que tiende la función para puntos muy próximos a x_0 y mayores que x_0.

Para expresar el límite por la derecha se escribe $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Relación entre el límite y los límites laterales de una función

El límite de una función $y = f(x)$ en un punto x_0 existe si y sólo si existen los límites laterales y coinciden:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Si se verifica esto, y *l* es un número finito, se dice que la función es *convergente*.

En el ejemplo anterior los límites por la derecha y por la izquierda coinciden:

$$\lim_{x \to 3^-} (2x + 1) = \lim_{x \to 3^+} (2x + 1) = 7$$

PROP. DE LOS LÍM. DE FUNCIONES

Si una función $f(x)$ tiene límite cuando x tiende a x_0, el límite es único.

Esto se puede escribir también así:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \\ \text{y } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l'\end{array}\right\} \Rightarrow l = l'$$

Ejercicio: cálculo aproximado de límites

① Sea la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq 2 \\ 7, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

¿Cuál es su límite cuando *x* tiende a 2?

Resolución:

Para calcular el límite de la función cuando *x* tiende a 2, puede hacerse una tabla de valores para puntos de abscisa próximos a 2:

Se observa que cuando *x* tiende a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, la función tiende al valor 4. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

② Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 3 \\ x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ definida en $\mathbf{R} - \{3\}$.

¿A qué valor se aproxima la función cuando *x* se aproxima a 3?

Resolución:

Cuando *x* se aproxima a 3, tanto por la izquierda como por la derecha, la función se aproxima al valor 1. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

Obsérvese cómo se pone de relieve que el valor del límite de una función en un punto es independiente del valor que la función tome en ese punto.

En este ejemplo, el límite de la función en el punto 3 es 1 y sin embargo, la función ni siquiera está definida en él.

LÍMITE DE UNA FUNC. EN UN PUNTO

1. Se dice que una función *f(x) converge*, en el punto x_0, hacia el valor *l*, o que su límite en x_0 es *l*, y se escribe $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, cuando a valores muy próximos a x_0 corresponden valores de la función muy próximos a *l*.

La definición anterior se puede concretar más:

2. Una función *f(x)* converge hacia *l* en x_0, o tiene por límite *l* en x_0, cuando para todo entorno de *l* de radio ε, $E(l, \varepsilon) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, hay un entorno de x_0 de radio δ, $E(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tal que para cualquier *x* de $E(x_0, \delta)$, su imagen *f(x)* está en $E(l, \varepsilon)$.

O bien:

3. Una función $f(x)$ converge hacia l en x_0, o tiene por límite l en x_0, cuando para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Límites infinitos

Una función es *divergente* cuando su límite es $+\infty$ ó $-\infty$.

Se estudiarán los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

2. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$

3. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

- **Caso 1.** $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Para calcular el límite de esta función en el punto $x_0 = 0$, hay que estudiar los valores que toman las imágenes de puntos próximos a 0. De la observación de la gráfica de la función se deduce que:

Para valores próximos a 0 y menores que 0, la función toma valores cada vez mayores. Esto significa que $\lim_{x \to 0^-} 1/x^2 = +\infty$.

Para valores próximos a 0 y mayores que 0, la función toma valores cada vez mayores. Esto significa que $\lim_{x \to 0^+} 1/x^2 = +\infty$.

Puesto que $\lim_{x \to 0^-} 1/x^2 = \lim_{x \to 0^+} 1/x^2 = +\infty$, entonces $\lim_{x \to 0} 1/x^2 = +\infty$.

En el caso de la función $g(x) = -1/x^2$, el límite de la función cuando x tiende a 0 es $-\infty$.

Para valores próximos a 0 y distintos de 0, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores que toma la función son cada vez menores.

•**Caso 2.** $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$

Sea la función $y = \frac{x}{x-1}$.

Observando la gráfica de la función, se ve como a medida que *x* toma valores cada vez mayores, la función se aproxima más a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando *x* tiende a infinito es 1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

De la observación de la gráfica se deduce que a medida que *x* toma valores cada vez menores, la función se aproxima más a 1. Por lo tanto, el límite de la función cuando *x* tiende a -∞ es también 1.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

•**Caso 3.** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$

Sea la función $f(x) = x + 5$.

Observando la gráfica se ve claramente que cuando *x* tiende a más infinito, la función también tiende a más infinito. Es decir, a valores cada vez mayores de *x*, corresponden valores cada vez mayores de la función.

Por tanto, $\lim_{x \to \infty} (x+5) = +\infty$.

Cuando *x* toma valores cada vez menores, la función también toma valores cada vez menores. Por lo tanto,

$\lim_{x \to -\infty} (x+5) = -\infty$.

Si se estudian los límites en el infinito de $g(x) = -(x + 5)$, se tiene:

$$\lim_{x \to \infty} -(x+5) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} -(x+5) = +\infty$$

Es decir, cuando *x* toma valores cada vez mayores, $x \to +\infty$, la función toma valores cada vez menores, $g(x) \to -\infty$.

Y cuando *x* toma valores cada vez menores, $x \to +\infty$, la función toma valores cada vez mayores, $g(x) \to +\infty$.

OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

Sean *f* y *g* dos funciones tales que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$

Límite de una suma de funciones

El límite de una suma de dos funciones convergentes, es igual a la suma de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = A + B$$

Límite de una resta de funciones

El límite de una resta de dos funciones convergentes, es igual a la diferencia de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = A - B$$

Límite de un producto de funciones

El límite de un producto de dos funciones convergentes, es igual al producto de los límites de cada una de ellas:

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$$

Límite de un cociente de funciones

El límite de un cociente de dos funciones convergentes es igual al cociente de los límites de cada una de ellas, si el denominador no es nulo:

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \text{ (siempre que } B \neq 0\text{)}$$

Ejercicio: límites de suma, resta, producto y cociente de funciones

① Si $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$; calcular $\lim\limits_{x\to 3} (f+g)(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} (f-g)(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} (f\cdot g)(x)$ y $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Resolución:

- $\lim_{x \to 3} f(x) = 3^2 + 2 = 11$ y $\lim_{x \to 3} g(x) = \frac{1}{3}$
- $\lim_{x \to 3} (f + g)(x) \ \lim_{x \to 3} f(x) + \lim_{x \to 3} g(x) = 11 + \frac{1}{3} = \frac{34}{3}$
- $\lim_{x \to 3} (f - g)(x) = 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$
- $\lim_{x \to 3} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to 3} f(x) \cdot \lim_{x \to 3} g(x) = \frac{11}{3}$
- $\lim_{x \to 3} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{11}{1/3} = 33$

CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES (I)

Cálculo del límite de funciones polinómicas

Una función polinómica es una función del tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots \ + a_n x^n$$

Para estudiar el cálculo de su límite, se distinguirán dos casos:

A. Límite de una función polinómica en un punto x_0 finito

El límite de una función polinómica en un punto x_0 es igual al valor que toma la función en ese punto:

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots \ + a_n x^n) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + \ \ldots \ + a_n x_0{}^n$$

B. Límite de una función polinómica en el infinito

El límite de una función polinómica en el infinito es +∞ ó -∞, dependiendo de que el coeficiente del término de mayor grado del polinomio sea positivo o negativo:

$$\lim_{x \to \infty} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots \ + a_n x^n = +\infty; \text{ si } a_n \text{ es positivo.}$$

$$\lim_{x \to \infty} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \ldots \ + a_n x^n = -\infty; \text{ si } a_n \text{ es negativo.}$$

Ejercicio: cálculo de límites de funciones polinómicas

① Calcular $\lim_{x \to -1} 4x^3 - 3x - 2$.

Resolución:

$$\lim_{x \to -1} 4x^3 - 3x - 2 = 4 \cdot (-1)^3 - 3(-1) - 2 = -4 + 3 - 2 = -3$$

② Calcular $\lim_{x \to \infty} 3 + x^2 - 4x^5$ y $\lim_{x \to \infty} \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x - 6$.

Resolución:

$\lim_{x \to \infty} 3 + x^2 - 4x^5 = -\infty$, ya que coeficiente del término de mayor grado es -4.

$\lim_{x \to \infty} \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{2}x - 6 = +\infty$, puesto que el coeficiente del término de mayor grado, 8/3, es positivo.

<u>Cálculo de límites de funciones racionales</u>

Una función racional es una función del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Para estudiar el límite de una función racional, se distinguirán dos casos:

A. Límite de una función racional en un punto x_0 finito

Puesto que una función racional es el cociente de dos polinomios, para calcular su límite puede aplicarse la regla para el cálculo del límite de un cociente de dos funciones:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)}$$

Tanto el límite del numerador como el del denominador son límites de funciones polinómicas, cuyo cálculo se explicó en el apartado anterior.

Al efectuar estos límites pueden darse varias situaciones.

A.1. *El límite del denominador es distinto de cero:* $\lim_{x \to x_0} Q(x) \neq 0$

Se calculan en este caso los límites de $P(x)$ y $Q(x)$ como funciones polinómicas y se halla su cociente.

A.2. *El límite del denominador es cero:* $\lim_{x \to x_0} Q(x) = 0$

Si el denominador se anula en x_0, puede ocurrir que el numerador también se anule en x_0, o que el numerador no se anule en x_0.

A.2.1. *El límite del numerador también es cero:* $\lim_{x \to x_0} Q(x) = 0$ y $\lim_{x \to x_0} P(x) = 0$

En este caso se obtiene el resultado $\frac{0}{0}$, que es una indeterminación.

Para resolver esto basta con tener en cuenta que si $Q(x_0) = 0$ y $P(x_0) = 0$, x_0 es raíz de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, y por tanto el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede simplificar.

Una vez hecha la simplificación, bien dividiendo $P(x)$ y $Q(x)$ entre $x - x_0$ ó bien aplicando la regla de Ruffini, se vuelven a calcular los límites de los polinomios ya simplificados.

A.2.2. *El límite del numerador no es cero.*

El límite del cociente da como resultado la indeterminación $\frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{0}$.

Para resolver esta indeterminación es necesario estudiar los límites laterales de la función $f(x) = P(x)/Q(x)$, en el punto x_0.

Si ambos límites laterales son iguales, la función tiene por límite su valor. Si no son iguales, la función no tiene límite.

Ejercicio: cálculo de límites de funciones racionales ($x \to x_0$)

① Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{3x^2 + 4}$ cuando $x \to 1$.

Resolución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 1}{3x^2 + 4} = \frac{\lim_{x \to 1}(2x^3 - 1)}{\lim_{x \to 1}(3x^2 + 4)} = \frac{1}{7}$$

② Calcular el límite de la función $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10}$, cuando $x \to 2$.

Resolución:

• $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \frac{\lim_{x \to 2}(x^3 - 2x^2 - 6x + 12)}{\lim_{x \to 2}(x^2 + 3x - 10)} = \frac{2^3 - 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 12}{2^2 + 3 \cdot 2 - 10} = \frac{0}{0}$$

Esta indeterminación se resuelve simplificando el cociente. Aplicando la regla de Ruffini, se obtiene la descomposición de los polinomios $P(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 12$ y $Q(x) = x^2 + 3x - 10$.

● Descomposición factorial de $P(x)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -6 & 12 \\ 2 & & 2 & 0 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & -6 & 0 \end{array} \quad P(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 12 = (x-2)\,(x^2 - 6)$$

● Descomposición factorial de $Q(x)$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & -10 \\ 2 & & 2 & 10 \\ \hline & 1 & 5 & 0 \end{array} \quad Q(x) = x^2 + 3x - 10 = (x-2)\,(x+5)$$

● El límite del cociente $P(x)/Q(x)$ es:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\,(x^2-6)}{(x-2)\,(x+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-6)}{(x+5)} = \frac{-2}{7}$$

③ Calcular el límite de la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{x}$ cuando $x \to 0$.

Resolución:

● $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 4x}{x} = \frac{\lim_{x\to 0}(3x^2 - 4x)}{\lim_{x\to 0} x} = \frac{0}{0}$, indeterminación.

● Se simplifican numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 - 4x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\,(3x-4)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} 3x - 4 = -4$$

④ Calcular $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2}$

Resolución:

● $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{\lim_{x\to 3}(x-3)^2} = \frac{1}{0}$, indeterminación.

● Para resolver la indeterminación se estudian los límites laterales de la función en el punto $x_0 = 3$.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{\lim_{x\to 3^+} 1}{\lim_{x\to 3^+}(x-3)^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{\lim_{x\to 3^-} 1}{\lim_{x\to 3^-} (x-3)^2} = \frac{1}{0} = +\infty$$

• Como los límites laterales coinciden, $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$

⑤ Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$, cuando $x \to 1$.

Resolución:

• $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1}(x-1)} = \frac{1}{0}$, indeterminación

• Se estudian los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1^+} 1}{\lim_{x\to 1^+} (x-1)} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1^-} 1}{\lim_{x\to 1^-} (x-1)} = \frac{1}{0} = -\infty$$

Como los dos límites laterales no coinciden, la función $f(x) = 1/(x - 1)$ no tiene límite cuando x tiende a 1.

CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCCIONES (II)

B. Límite de una función racional en el infinito

Las reglas de cálculo de límites de funciones cuando $x \to \pm\infty$, son las mismas que las empleadas para límites de sucesiones.

El límite de una función racional cuando $x \to \pm\infty$, es igual al límite del cociente de los términos de mayor grado del numerador y denominador.

Si $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots\ + a_n x^n$

$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ \dots\ + b_m x^m$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots\ + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ \dots\ + b_m x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

El valor de este límite depende del valor que tengan n y m:

● Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador ($n > m$), el límite es $\pm\infty$, dependiendo de que los signos de los cocientes a_n y b_m sean iguales o distintos.

● Si el grado del numerador es igual que el grado del denominador ($n = m$), el límite es el cociente a_n/b_m.

● Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador ($n<m$), el límite es 0.

Ejercicio: cálculo de límites de funciones racionales ($x \to \infty$)

① Calcular el límite de la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4}$ cuando $x \to \infty$.

Resolución:

En este caso, el grado del numerador, 2, es mayor que el grado del denominador, 1, por tanto el límite es ∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{1} = +\infty$$

② Calcular el límite de la función $g(x) = \dfrac{x^3 - 5}{-x^2 - 4}$ cuando $x \to \infty$.

Resolución:

El grado del numerador es mayor que el grado del denominador, y los términos de mayor grado tienen signos distintos, por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-1} = -\infty$$

③ Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4}$.

Resolución:

El grado del numerador es igual que el grado del denominador, por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2}{4x^2} = \frac{-3}{4}$$

④ Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3}$.

Resolución:

El grado del numerador es menor que el grado del denominador, por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

<u>Cálculo de límites de funciones irracionales</u>

Una función es irracional cuando la variable independiente aparece bajo el signo de raíz.

Son funciones irracionales las siguientes:

$f(x) = \sqrt{x-3}$; $g(x) = 3x - \sqrt{x^2+5}$; $h(x) = \sqrt{x-1}/\sqrt{x+1}$; $k(x) = x/\sqrt{x}$, etc.

El modo de calcular el límite de una función irracional es análogo al cálculo del límite de una suceción irracional.

A. Cálculo del límite de una función irracional en un punto x_0 finito

Estos límites se resuelven, en general, como si de una función racional se tratara.

En el caso de que, calculando el límite aparezca una indeterminación, ésta suele resolverse multiplicando y dividiendo por el conjugado del numerador o del denominador.

Ejercicio: cálculo de límites de funciones irracionales ($x \to x_0$)

① Calcular $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2}$.

Resolución:

- $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2} = \sqrt{2-2} = 0$

② Calcular $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

Resolución:

- $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{1-1} = \frac{0}{0}$. Indeterminación.

- Para resolver la indeterminación se multiplica y se divide por el conjugado del numerador, $\sqrt{x}+1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

③ Resolver el siguiente límite: $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$.

Resolución:

• $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{5-5} = \frac{0}{0}$. Indeterminación.

• Para resolver la indeterminación se multiplica y se divide por $\sqrt{x}+\sqrt{5}$:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)}{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

B. Cálculo del límite de una función irracional en el infinito

B.1. *Límites indeterminados de la forma* ∞/∞

Cuando al calcular el límite de una función irracional resulta la indeterminación ∞ / ∞, ésta se resuelve aplicando la regla dada para la misma situación en funciones racionales.

Ejercicio: cálculo de límites indeterminados de la forma ∞/∞

---

① Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3}$ cuando $x \to \infty$.

Resolución:

• $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\infty}{\infty}$. Indeterminación.

• Haciendo uso de la regla mencionada, resulta:

Grado del numerador = 3

Grado del denominador = 1/2, (puesto que $\sqrt{x} = x^{1/2}$)

Por lo tanto, $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^3-2}{\sqrt{x}-3} = \infty$

② Calcular el límite de la función $f(x) = \dfrac{5x-3}{\sqrt{4x^2+3x-1}}$ cuando $x \to \infty$.

Resolución:

● Calculando el límite del numerador y del denominador se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-3}{\sqrt{4x^2+3x-1}} = \frac{\infty}{\infty}.\ \text{Indeterminación.}$$

● Estudiando los grados:

Grado del numerador = 1

Grado del denominador = 1 (puesto que $\sqrt{x^2} = x$)

Por lo tanto, el límite es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x-3}{\sqrt{4x^2+3x-1}} = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$$

③ Calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5+2x-6}}{x^3-4x+2}$.

Resolución:

● $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5+2x-6}}{x^3-4x+2} = \frac{\infty}{\infty}$. Indeterminación.

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\text{Grado del numerador} = 5/2 \\ \text{Grado del denominador} = 3\end{array}\right\} \frac{5}{2} < 3$$

Por lo tanto, el límite es:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5+2x-6}}{x^3-4x+2} = 0$$

B2. *Límites indeterminados de la forma $\infty - \infty$*

Cuando al calcular el límite de una función irracional resulta la indeterminación $\infty - \infty$ ésta se resuelve generalmente multiplicando y dividiendo la función por su conjugada.

Ejercicios: cálculo de límites indeterminados de la forma $\infty - \infty$

① Calcular el límite de la función $y = \sqrt{x^2+3x} - x$, cuando $x \to \infty$.

Resolución:

• $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x} - x) = \infty - \infty$. Indeterminación.

• Se multiplica y se divide la función por su conjugada, $\sqrt{x^2+3x} + x$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} - x)\,(\sqrt{x^2+3x} + x)}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2}$$

② Calcular el límite de la función $y = \sqrt{x-3} - \sqrt{x+3}$, cuando $x \to \infty$.

Resolución:

• $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x+3}) = \infty - \infty$. Indeterminación.

• Se multiplica y se divide la función por su conjugada, $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x-3} - \sqrt{x+3})\,(\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)-(x+3)}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-6}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}} = 0$$

③ Calcular el límite de la función $f(x) = \sqrt{x+1} - x$, cuando $x \to \infty$.

Resolución:

• $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - x) = \infty - \infty$. Indeterminación.

• Se multiplica y se divide la función por su conjugada, $\sqrt{x+1} + x$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - x)\,(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1} + x} = -\infty$$

CONTINUIDAD

Función continua

Una *función f* es *continua* en un punto x_0 cuando existe el límite de la función en x_0 y coincide con el valor que toma la función en x_0.

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Para que una función sea continua en x_0, se tienen que cumplir tres condiciones:

1. Existir el límite de la función cuando $x \to x_0$.

2. Estar definida la función en x_0, es decir, existir $f(x_0)$.

3. Los dos valores anteriores han de coincidir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si alguna de las tres condiciones no se cumple, la función es *discontinua* en x_0.

Se dice que una *función* es *continua en un intervalo* cuando es continua en todos los puntos del intervalo.

Ejercicio: estudio de la discontinuidad de una función

① Probar que la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \leq 3 \\ -1, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

es discontinua en el punto $x_0 = 3$.

Resolución:

Para probar la discontinuidad de la función en $x_0 = 3$ hay que ver cuál de las tres condiciones de continuidad no se cumple.

En este caso es la primera, ya que no existe el límite de la función cuando x tiende a 3; los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = -1$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$$

Por tanto, la función es discontinua en $x_0 = 3$.

② Probar que la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 3 \\ x - 2, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

es discontinua en $x_0 = 3$.

Resolución:

● En este caso existe el límite de la función cuando x tiende a 3, y es 1; los dos límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - 2) = 3 - 2 = 1$$

● Sin embargo, la función no está definida en $x_0 = 3$; no existe $f(3)$.

Por tanto, la función es discontinua en $x_0 = 3$.

③ ¿Es la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \neq 2 \\ 5, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ discontinua en el punto $x_0 = 2$?

Resolución:

- Existe el límite de la función cuando x tiende a 2, ya que los dos límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 - 1 = 3$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 - 1 = 3$$

- La función está definida para $x = 2$ y vale 5: $f(2) = 5$.

- Sin embargo, el valor del límite de la función cuando $x \to 2$ no coincide con $f(2)$:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 \neq f(2) = 5$$

Por tanto, la función es discontinua en $x_0 = 2$.

OPER. CON FUNCIONES CONTINUAS

Suma

La suma de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Demostración:

Sean f y g dos funciones continuas en un punto x_0. Esto significa que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ y } \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Para probar que la función suma $f + g$ es una función continua en x_0, es necesario demostrar que $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$.

Aplicando una de las propiedades de los límites de funciones,

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$$

La demostración es válida para una suma de n funciones continuas en x_0.

Resta

La resta de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Esta demostración, como las que siguen, se hacen de forma similar a la anterior, basándose en las propiedades de los límites de funciones.

Producto

El producto de dos funciones continuas en un punto es también una función continua en ese punto.

Producto de una función por un número

El producto de una función continua en un punto, por un número real, es otra función continua en ese punto.

Cociente

El cociente de dos funciones continuas en un punto es otra función continua en ese punto. (Siempre que el denominador no se anule).

Composición de funciones

Si f es una función continua en x_0 y g es otra función continua en $f(x_0)$, la función compuesta $g o f$ es continua en el punto x_0.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Si una función es continua en un punto x_0, entonces es convergente en x_0, es decir, existe el límite de la función cuando x tiende a x_0.

$$\text{Si } f(x) \text{ es continua en } x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

CONT. DE FUNCIONES ELEMENTALES

Función constante

La función constante $f(x) = k$ es continua en todos los puntos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k \\ f(x_0) = k \end{array}\right\} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función identidad

La función identidad $f(x) = x$ es continua en todos los puntos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0 \\ f(x_0) = x_0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función potencial

La función potencial $f(x) = x^n$ es continua en todos sus puntos, salvo el caso en que $n<0$ y $x=0$, ya que en este caso se tendría una función racional con denominador nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0{}^n \\ f(x_0) = x_0{}^n \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

Función polinómica

La función $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots\ + a_n x^n$ es una función continua en todos los puntos, por ser suma de funciones continuas en todos los puntos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + \ \dots\ + a_n x_0{}^n \\ f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + \ \dots\ + a_n x_0{}^n \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función racional

La función $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas, es continua en todos los puntos, salvo en los que el denominador se anula, por ser un cociente de dos funciones continuas.

Función exponencial

La función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$, es continua en todos los puntos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a^{x_0} \\ f(x_0) = a^{x_0} \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Función logarítmica

La función $f(x) = log_a\ x$, siendo $a > 1$, es continua en todos los puntos de su campo de existencia $(0, +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \log_a x_0 \\ f(x_0) = \log_a x_0\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ejercicio: estudio de los puntos de continuidad

① Indicar en qué puntos la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x - 3}$ es discontinua.

Resolución:

La función es continua en todos los puntos salvo en los que se anula el denominador, ya que en éstos la función no estará definida; es decir, en $x = 3$.

La función es continua en todos los puntos salvo en $x = 3$, en el que es discontinua.

② Realizar un estudio e indicar si la función $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 - 3x - 10}$ es continua en los intervalos (-3, 0) y (0, 2).

Resolución:

● La función es continua en todos los puntos, salvo en los que el denominador se anula. El denominador se anula en $x = -2$ y en $x = 5$

● El punto $x = -2$ está en el intervalo (-3, 0), luego en éste la función no es continua.

● $-2 \notin (0, 2)$ y $5 \notin (0, 2)$; luego en este intervalo la función $f(x)$ sí es continua.

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS DE DISCONTINUIDAD.

Para que una función $f(x)$ sea discontinua (o no continua) en un punto x_0 deberá darse una, al menos, de estas condiciones:

a) No existe $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ o no existe $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

b) Los límites laterales existen, pero $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

c) Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, pero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Dependiendo de qué condición se verifique, los puntos en los que una función no es continua se clasifican en puntos de *discontinuidad evitable* y en puntos de *discontinuidad no evitable* (o *inevitable*).

Discontinuidad evitable

Una función presenta una *discontinuidad evitable* en un punto x_0 cuando, existiendo el límite de la función en éste, no coincide con el valor que toma la función en el punto (caso *c*):

x_0 es un punto de discontinuidad evitable $\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

La discontinuidad se puede evitar asignando a la función, en el punto x_0, el valor de su límite.

En este caso a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ se le denomina verdadero valor de la función en x_0, y es el que hace la función sea continua en ese punto.

Discontinuidad inevitable

Una función presenta una *discontinuidad inevitable* en un punto x_0 cuando o bien no existe algún límite lateral (caso *a*) o bien los límites laterales existen pero son distintos (caso *b*), en cuyo caso no existe el límite.

$$x_0 \text{ es un punto de discontinuidad inevitable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{No existe } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \\ \text{o no existe } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \\ \text{o no existe } \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$$

Ejercicio: estudio y clasificación de los puntos de discontinuidad de una función

① Realizar un estudio de los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ si } x \neq 1 \\ 1, \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Resolución:

● La función $x+2$ es continua en todos los puntos.

● La función $f(x)$ es continua en todos los puntos salvo en $x=1$; ya que $f(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x + 2 = 3 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + 2 = 3 \end{array}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$$

●Si se asigna a $f(1)$ el valor 3, valor de $\lim_{x \to 1} f(x)$, se evita la discontinuidad y entonces $f(x) = x + 2$ es continua en todos los puntos.

El verdadero valor de la función en $x = 1$ es 3.

② Estudiar la discontinuidad (evitable o no) de la función $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ si } x < 3 \\ 1, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$

Resolución:

● $f(x)$ es continua en todos los puntos salvo en $x = 3$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 2 = 2 \\ &\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 1 = 1 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

La discontinuidad es inevitable.

③ Estudiar y clasificar los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Resolución:

● La función es continua en todos los puntos salvo en los que se anule el denominador: $x = 2$

●Se procede a ver si la discontinuidad en $x_0 = 2$ es evitable o no:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x + 2)\,(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 2) = 4$$

● El límite existe y es 4, por lo tanto la discontinuidad en $x_0 = 2$ es evitable. El verdadero valor de la función en $x_0 = 2$ es 4.

Asignando a $f(2)$ el valor 4, la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, \text{ si } x \neq 2 \\ 4, \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

es continua en todos los puntos.